الثانية ع ر سلسلة 7	الحسابيات في $\mathbb{Z}$ (1)	ح.بوعيون

تمرين1

1) ما هو باقي قسمة العدد 1996^{1996} على 11 .

2) حدد باقي قسمة العدد $N = 2222^{3333} + 3333^{2222}$ على 5 .

3) a) $(\forall n \in IN) : 9 / n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$

b) $(\forall n \in IN) : 6 / n(2n+1)(7n+1)$

4) a) حدد بواقي القسمة الأقليدية للأعداد 4^n على 7 .

b) حدد حسب قيم العدد n باقي قسمة العدد :

$A = 851^{3n} + 851^{2n} + 2$ على 7 .

5) بين أنه إذا كان n عدد طبيعي غير مضاعف لــ 3 فإن $5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 0[31]$.

تمرين2

حل في Z المعادلتين :

1) $n+8 \equiv 0[n-2]$

2) $3n-2 \equiv 0[n+3]$.

تمرين3

ليكن A عدد فردي ومجموع مربعين كاملين .

ما هو باقي قسمة A على 4 ؟

تمرين4

ليكن a و b و c و d من $\mathbb{Z}^*$ بحيث

$a \wedge b = c \wedge d = 1$

بين أن $ac \wedge bd = (a \wedge d).(b \wedge c)$

تمرين5

1) ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ بحيث $a \wedge b = 1$. أحسب

a) $(11a+5b) \wedge (13a+6b)$ b) $(a^3 - b^3) \wedge (a^2 - b^2)$

2) أحسب $(n!+1) \wedge ((n+1)!+1)$

تمرين6

بين أنه لكل $n \in IN^*$ لدينا

1) $(21n+4) \wedge (14n+3) = 1$

2) $(n^3+2n) \wedge (n^4+3n^2+1) = 1$

3) $(2^n+3^n) \wedge (2^{n+1}+3^{n+1}) = 1$

تمرين7

حل في IN^{*2} النظمات التالية :

1) $\begin{cases} x+y=48 \\ x \wedge y = 6 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy=1512 \\ x \vee y = 252 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x \wedge y = 5 \\ x \vee y = 30 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y=276 \\ x \vee y = 1440 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x \vee y = 210(x \wedge y) \\ y - x = x \wedge y \end{cases}$

7) $\begin{cases} x \vee y - 3(x \wedge y) = 108 \\ 10 \le x \wedge y \le 15 \end{cases}$ 8) $x \vee y - (x \wedge y) = 187$

تمرين8

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $n \in IN^*$.

1) بين أن $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$

2) استنتج أن $a^n / b^n = a / b$

3) بين أن $(\forall x \in \mathbb{Q}^*) : x^n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

تمرين9

نعتبر في Z^2 المعادلة $3x - 5y = 13$ (1)

1) حل في Z^2 المعادلة (1) .

2) حدد الحلول (x,y) للمعادلة (1) بحيث $\frac{x}{y} \in Z$.

3) بين أنه لكل k من Z لدينا :

$(5k+1) \wedge (3k-2) = (k-5) \wedge 13$

4) حل في Z^2 النظمة : $\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ x \wedge y = 13 \end{cases}$

تمرين10

1) بين أن : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a^2+b^2) \wedge ab = 1$

لكل a و b من $\mathbb{Z}^*$.

2) نعتبرفي $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ النظمة : $(S) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1300 \\ (x \wedge y).(x \vee y) = 600 \end{cases}$

ليكن (x, y) حل للنظمة (S) و $d = x \wedge y$

a) بين أن $d = 10$. b) حل النظمة (S) .

تمرين11

1) بين أن $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$

2) حدد قيم n التي يكون من أجلها $n+2 / 5n^3 - n$.

3) حدد القيم الممكنة للعدد $d = (5n^3 - n) \wedge (n+2)$

4) حدد قيم n التي يكون من أجلها $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = 19$

تمرين12

ليكن m و n و p أعداد من $\mathbb{Z}$ بحيث :

$m^3 + n^3 + p^3 \equiv 0[7]$. بين أن $mnp \equiv 0[7]$

تمرين13

لكل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ نضع

$b = n - 1$ و $a = n^2 - 3n + 6$

1) بين أن : $a \wedge b = b \wedge 4$

2) استنتج $a \wedge b$ حسب قيم العدد n .

<u>تمرين14</u>

في كل ما سيأتي a و b عددين من Z^* أوليان فيما بينهما .

نضع $n = a^4 + b^4$.

1) a) بين أن $(\forall k \in Z) : (2k+1)^4 \equiv 1[16]$ (لاحظ أن $2 / k(k+1)$)

b)استنتج من ذلك أن $n \equiv 1[16]$ أو $n \equiv 2[16]$.

2) ليكن p قاسم أولي وفردي للعدد n .

a) بين أن $p \wedge a = 1$ و $p \wedge b = 1$ (بالخلف) .

b) بين أنه يوجد c من Z بحيث $ca \equiv -1[p]$.

c) استنتج أنه يوجد x من Z بحيث $x^4 \equiv -1[p]$.

d) باستعمال القسمة الأقليدية ل p عل 8 ثم Fermat بين أن $p \equiv 1[8]$.

<u>تمرين15</u>

1) a) بين أن لكل a من Z : $a^2 \equiv 1[3]$ أو $a^2 \equiv 0[3]$

b) استنتج أن :

$$(\forall (a,b) \in Z^2) : a^2 + b^2 \equiv 0[3] \Rightarrow a \equiv b \equiv 0[3]$$

2) ليكن $(x,y,z) \in Z^3$ بحيث $x^2 + y^2 = 3z^2$

a) بين أن : $x \equiv y \equiv 0[3]$ و $3z^2 \equiv 0[9]$

b) استنتج أن : $x \equiv y \equiv z \equiv 0[3]$

<u>تمرين16</u>

1)حدد العدد x من IN بحيث $\overline{234x}_{(6)} \equiv 0[4]$

2) حدد a و b و c من IN بحيث $\begin{cases} \overline{bacb}_{(10)} \equiv 0[7] \\ \overline{bacb}_{(10)} \equiv 0[99] \end{cases}$

3) حدد x و y و z من IN بحيث $\overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(11)}$

<u>تمرين17</u>

نعتبر في Z^2 المعادلة $(E)\ x^2 + y^3 = 7$

I) بين أن المعادلة $x^2 + 1 \equiv 0[8]$ لا تقبل أي حل في Z .

II) نفترض فيما يلي ان المعادلة (E) تقبل حلا (x,y) .

1) بين أن y عدد فردي . نضع إذن y=2z+1 .

2) تحقق أن $x^2 + 1 = (2-y)m$ حيث $m = 4z^2 + 8z + 7$

3) بين أن $m \equiv 3[4]$.

4) ليكن $m = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_r^{\alpha_r}$ تفكيك m إلى جداء من عوامل أولية .

a) بين أن

$$(\forall i \in \{1,2,......,r\}) : P_i \equiv 1[4] \text{ أو } P_i \equiv 3[4]$$

b) بين بالخلف أنه يوجد $1 \le i \le r$ بحيث $P_i \equiv 3[4]$

5)استنتج مما سبق أنه يوجد عدد أولي p يحقق ما يلي :

$$\begin{cases} p \ge 3 \\ p \equiv 3[4] \\ x^2 + 1 \equiv 0[p] \end{cases}$$

6) a) بين أن $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$

(لاحظ أن $-1 \equiv x^2[p]$ واستعمل Fermat) .

b) استنتج أن $p \equiv 1[4]$.

7) ما هي مجموعة حلول المعادلة (E) ؟

<u>تمرين18</u>

ليكن x عددا من IN^* بحيث: $\overline{36}^{(x)} + \overline{45}^{(x)} = \overline{103}^{(x)}$

أحسب $\overline{36}^{(x)} \times \overline{45}^{(x)}$

<u>تمرين19</u>

ليكن a و b و c اعدادا من IN بحيث $N \equiv \overline{abc}^{(10)}$

بين أن $N \equiv 0\ [17] \Rightarrow (2a - c)^2 + 2b^2 \equiv 0\ [17]$

<u>تمرين20</u>

ليكن n عدد صحيح طبيعي بحيث $n \ge 6$.

نضع $b = \overline{252}^{(n)}$ و $a = \overline{2310}^{(n)}$ و $d_n = a \wedge b$.

1) بين أن $(2n+1)/b$ و $(2n+1)/a$.

2) حدد بدلالة n العدد $\Delta_n = (n^2 + n) \wedge (n+2)$

(ناقش حسب زوجية العدد n)

3) بين أن $d_n \in \{2(2n+1)\ ,\ 2n+1\}$.

4) نأخذ $n = 6$, حل في Z^2 في المعادلة:

$ax + by = -26$

<u>تمرين21</u>

نعتبر الأعداد x و y و z من IN بحيث :

$z = \overline{101}^{(x)}$ و $y = \overline{131}^{(x)}$

1) أكتب الجداء x.y.z في نظمة العد ذات الأساس x .

2) هل يمكن كتابة x + y + z في نظمة العد ذات الأساس x؟

3) إذا علمت أن : $x + y + z = 50$

(في نظمة العد العشري) فأحسب :

$\overline{x.y.z}^{(10)}$ و $\overline{x+y+z}^{(x)}$

4) ليكن $N = \overline{342y}^{(x)}$, حدد قيم لكي يكون هذا العدد قابلا للقسمة

أ – على 5 من أجل $x = 6$.

ب – على 12 من أجل $x = 17$

<u>تمرين22</u>

1) ليكن m و n عددين طبيعيين وأوليين فيما بينهما

a) بين أن m+n و mn أوليان فيما بينهما .

b) بين أن أحد العددين a+b و ab فردي والآخر زوجي .

2) ليكن x و y من IN^* ، نضع

$a = \frac{x}{\Delta}$ و $b = \frac{y}{\Delta}$ و $\Delta = x \wedge y$ و $M = x \vee y$

a) بين أن $\begin{cases} x + y = 120 \\ M = \Delta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)ab = 120 \\ ab = \Delta \end{cases}$

b) استنتج في IN^{*2} حلول النظمة $\begin{cases} x + y = 120 \\ M = \Delta^2 \end{cases}$.

تمرين23

ليكن $k \in IN^*$ $A=9(k+3)$; $B=4k$; $d=A\wedge B$

1) بين أن $d/108$.

2) حدد قيم k التي يكون من أجلها i) 2 لايقسم d .

ii) 3 لايقسم d .

3) ليكن $k=2+6m$ a) بين أن d=1 .

b) حل في Z^2 المعادلة $Ax-By=108$

تمرين24

في IN^3 نعتبر المعادلة $x^2+2y^2=z^2$ (1)

1) a) بين أن $(\forall (m,n)\in IN^{*2}): m^2/n^2 \Rightarrow m/n$.

b) بين أنه يكفي أن تدرس الحالة التي يكون فيها $x\wedge y=1$.

فيما يلي نفترض أن $x\wedge y=1$ في المعادلة (1) .

2) a) بين أنه إذا كان (x,y,z) حلا للمعادلة (1) فإن x و z فرديان و y زوجي .

b) نضع $d=(z-x)\wedge(z+x)$ بين أن d زوجي واستنتج أن d=2

c) بين أنه إذا كان $a^2=bc$ و $c\wedge b=1$ فإنه يوجد b' و c' بحيث $b=b'^2$ و $c=c'^2$.

d) ليكن α و β من IN بحيث $3-x=2\alpha$ و $3+x=2\beta$

بين أن α أو β زوجي واستنتج حلول المعادلة (1) .

تمرين25

ليكن $(n\in IN^*)$ ، نضع :

$A_n=\frac{n(n+1)}{2}$ ، $B_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ، $C_n=(\frac{n(n+1)}{2})^2$.

1) بين أن A_n , B_n , C_n تنتمي ل IN^* .

2) احسب $A_n\wedge B_n$ (يمكن استعمال الموافقة بترديد3)

3) نضع $D_n=C_n\wedge C_{n+1}$

a) احسب D_n (يمكن استعمال الموافقة بترديدn)

b) ليكن $n\in IN^*-\{1\}$ بين أن الأعداد C_n , C_{n+1} , C_{n+2} أولية فيما بينها .

تمرين5 a و b من Z^* نضع $A=pa+qb$ و $B=ra+sb$ مع $(p,q,r,s)\in Z^4$ وتحقق $ps-qr=1$ و $A\neq 0, B\neq 0$

بين أن $A\wedge B=a\wedge b$.

تمرين26

1) ليكن m و n عددين طبيعيين وأوليين فيما بينهما .

a) بين أن m+n و mn أوليان فيما بينهما .

b) بين أن أحد العددين a+b و ab فردي والآخر زوجي .

2) ليكن x و y من IN^* ، نضع

$a=\frac{x}{\Delta}$ و $b=\frac{y}{\Delta}$ و $\Delta=x\wedge y$ و $M=x\vee y$

a) بين أن $\begin{cases}x+y=120\\ M=\Delta^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)ab=120\\ ab=\Delta\end{cases}$

b) استنتج في IN^{*2} حلول النظمة $\begin{cases}x+y=120\\ M=\Delta^2\end{cases}$.

تمرين27

بين أن $(\forall (a,b)\in Z^2): a\wedge b=1\Rightarrow a\wedge b(a+b)=1$

2) ليكن x و y من IN^* بحيث $x(43-x)=y(x+y)$

نضع $x\wedge y=d$ و $x=dx'$ و $y=dy'$

a) بين أن x'/d .

b) نضع $\alpha=\frac{d}{x'}$.

بين أن $\alpha(x'^2+x'y'+y'^2)=43$ واستنتج أن $\alpha=1$.

3) حل في IN^{*2} المعادلة $x(43-x)=y(x+y)$.

تمرين28

لكل $n\in IN^*$ نضع $x_n=2^n-1$

I) 1) a) بين أن $(\forall n\in IN^*)$: $x_{n+1}=2x_n+1$

b) استنتج أن $(\forall n\in IN^*)$: $x_{n+1}\wedge x_n=1$

2) a) بين أن : $n\equiv 0[6]\Leftrightarrow x_n\equiv 0[9]$ (لاحظ أن $2^6\equiv 1[9]$)

b) استنتج أنه يوجد مالانهاية له من الأعداد $n\in IN^*$ بحيث $n\wedge x_n\neq 1$

3) a) بين أن $(\forall (n,m)\in IN^{*2})$: $n/m\Rightarrow x_n/x_m$

b) ليكن m و n من IN^* . بين أنه إذا كان r باقي قسمة m على n فإن x_r هو باقي قسمة x_m على x_n (لاحظ أن $2^n\equiv 1[x_n]$)

c) استنتج أن $x_m\wedge x_n=x_n\wedge x_r$

d) بين باستعمال خوارزمية أقليدس أن :

$(\forall (m,n)\in IN^{*2})$: $x_m\wedge x_n=x_{m\wedge n}$

II) فيما يلي نريد أن نبين أن :

$(\forall k\in IN^*)(\exists i\in\{1,2,3,.....,2k\}): 2k+1/x_i$

نفترض العكس يعني :

$(\exists k\in IN^*)(\forall i\in\{1,2,3,.....,2k\}): x_i\neq 0[2k+1]$

ليكن R_i باقي قسمة x_i على $2k+1$

1) تحقق أن : $(\forall i\in\{1,2,3,.....,2k\}): 1\le R_i\le 2k$

2) a) بين أن : $x_i\equiv 2k[2k+1]\Leftrightarrow 2^i\equiv 0[2k+1]$

b) استنتج أن $(\forall i\in\{1,2,3,.....,2k\}): R_i\neq 2k$

3) بين أن البواقي R_i مختلفة مثنى مثنى .

4) ماذا تستنتج ؟

تمرين29

1) ليكن x و y عددان طبيعيان بحيث $x \wedge y = 1$

بين أن $x^{\alpha} \wedge y^{\beta} = 1$ لكل α, β من IN .

2) ليكن $\frac{a}{b_1 b_2 ....b_n}$ عددا جذريا غير منعدم بحيث $b_i \wedge b_j = 1$ $\forall i \neq j$. أثبت وجود أعداد صحيحة نسبية $a_1, a_2, ..., a_n$ بحيث

$$\frac{a}{b_1 b_2 ......b_n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + ...+ \frac{a_n}{b_n} .$$

3) ليكن a من $\mathbb{Z}^*$ و b من IN^* غير أولي . أثبت وجود أعداد نسبية غير منعدمة $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ بحيث $b_i \wedge b_j = 1$ و

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + ...+ \frac{a_n}{b_n}$$

تمرين30

1) a) بين أن لكل a **من** Z : $a^2 \equiv 1[3]$ **أو** $a^2 \equiv 0[3]$

b) استنتج أن :

$$(\forall (a,b) \in Z^2): a^2 + b^2 \equiv 0[3] \Rightarrow a \equiv b \equiv 0[3]$$

2) ليكن $(x, y, z) \in Z^3$ **بحيث** $x^2 + y^2 = 3z^2$

a) بين أن : $x \equiv y \equiv 0[3]$ **و** $3z^2 \equiv 0[9]$

b) استنتج أن : $x \equiv y \equiv z \equiv 0[3]$

تمرين31

1) بين أن :

$$(\forall a, b) \in Z^2) \quad : \quad a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b) \wedge (a^2 + ab + b^2) = 1$$

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ **النظمة :**

$$\begin{cases} 19(a+b) = 5(a^2 + ab + b^2) \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$$

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ **المعادلة :**

$$19(a+b)(a \wedge b) = 5(a^2 + ab + b^2).$$