

BACCALAUREAT BLANC

www.9alami.com

Jeudi 29 janvier 2009

Mathématiques

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

*Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4
L'exercice 3 sera rédigé sur une copie séparée*

L'usage des calculatrices est autorisé

La clarté et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : (5 points)

Partie A : R. O. C.

Prérequis : On sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls alors

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

Partie B :

Soient les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = \frac{1}{2}(1 - i)$. On pose $Z = z_1 z_2$.

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
2. a. Déterminer l'écriture algébrique de Z et son écriture trigonométrique.
b. En déduire que : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2$.

Partie C :

On considère l'équation (E) : $z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0$, où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.
2. Déterminer les nombres a , b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :
 $z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = (z - i)(az^2 + bz + c)$.
3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 2 : (3 points) **VRAI ou FAUX ?**

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration à la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. La limite de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}(\sin n + \ln n^2)$ n'existe pas.
2. $(1 - i)^9 = 16(1 - i)$.
3. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2 - 2y$.
On appelle u la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $u(0) = 0$.
On a $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 : (5 points)

Veillez rédiger cet exercice sur une copie séparée.

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque.

Exemples d'éléments de (E) : 2002 ; 3773 ; 9119.

Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1. a. Décomposer 1001 en produit de facteurs premiers.
b. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.
2. a. Quel est le nombre d'éléments de (E) ?
b. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5?
3. Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme $\overline{abba}$.
a. Montrer que : " n est divisible par 3" équivaut à " $a+b$ est divisible par 3".
b. Montrer que : " n est divisible par 7" équivaut à " b est divisible par 7".
4. Dédurre des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

Partie B : Étude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile.

On admet que pour tout élément n de (F) , il existe des entiers naturels p et q tels que :

$$n = 2000 + 4p \quad \text{et} \quad n = 2002 + 11q.$$

1. On considère l'équation (e) : $4p - 11q = 2$ où p et q sont des entiers relatifs.
Vérifier que le couple $(6;2)$ est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e) .
2. En déduire que tout entier n de (F) peut s'écrire sous la forme $2024 + 44k$ où k est un entier relatif.
3. À l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F) .

Exercice 4 : (7 points)

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$. L'objectif de cet exercice est l'étude de la fonction f , puis la recherche des primitives de cette fonction.
La partie C est indépendante des parties A et B.

Partie A- Étude de fonctions auxiliaires

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par:

$$g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$$

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.
- Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$.
- Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x-1) > 0$.
- Étudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α , dans l'intervalle $[e+1, e^3+1]$ puis étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1, \alpha[$ et $] \alpha, +\infty[$.

2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par: $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$ et prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$
- Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
- Démontrer que, φ est croissante sur l'intervalle $]1, \sqrt{\alpha}[$ et décroissante sur l'intervalle $] \sqrt{\alpha}, +\infty[$.

Partie B- Étude de la fonction f

- Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, on a $f(x) = \varphi(e^x)$.
- En déduire:
 - La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
 - La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 - Le sens de variation de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln\sqrt{\alpha}$.

Partie C- Recherche des primitives de f

- Vérifier que f est solution de l'équation différentielle: $y' + y = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$
- On pose $h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$.
 - Trouver une primitive H de h sur $]0, +\infty[$.
 - En déduire les primitives F de f sur $]0, +\infty[$.