BAC BLANC GM

MATHEMATIQUES

Problème *(11 points)*

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=1-2x+e^{2x}$ **.**

1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminer $g'(x)$. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas les limites de g aux bornes de son ensemble de définition)**.**

2. Montrer que $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ **.**

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x+2+xe^{-2x}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ d'unité graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ **.**

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ **.**

3. **a.** Calculer pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)$ et vérifier que **:**

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^{2x}}.$$

b. En utilisant la partie **A**, déterminer le tableau de variations de f **.**
c. En déduire que, pour tout x de $[0\ ;\ \infty[$ on a : $f(x) > 0$ **.**

4. **a.** Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ **.**

b. Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

5. Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

6. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par **:**

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x}.$$

a. Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
b. Soit l'aire $\mathcal{A}$ en cm² de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis sa valeur arrondie à 0,1 près.

Exercice 1 *(5 points)*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique : 2 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2+2\sqrt{2}z+6=0$.
   On appelle z_B la solution de cette équation dont la partie imaginaire est positive.
2. On désigne par A le point d'affixe $z_A=2+i\sqrt{2}$.
   Placer dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B.
3. Montrer que les points A et B appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $\sqrt{6}$.
4. Soient I, J et K les points d'affixes respectives z_I, z_J et z_K telles que :
   $z_I=2i$;
   z_J est le nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{3\pi}{4}$;
   $z_K = -\ z_J$
   a. Donner la forme algébrique de z_J .
   b. Placer les points I, J et K dans le plan complexe.
   Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifier.
   Donner le rayon du cercle $\mathcal{C}$ ' circonscrit au triangle IJK.
5. Soit E l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation :
   $$2 < |z| < \sqrt{6}\ .$$
   a. Tracer les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ '.
   b. Représenter l'ensemble E sur le graphique précédent à l'aide de hachures. Justifier.

Exercice 2 (*4 points*)

Un test d'aptitude consiste à poser à chaque candidat une série de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, deux réponses sont proposées dont une et une seule est correcte. Un candidat répond chaque fois au hasard (on suppose donc l' équiprobabilité des réponses).

On note V une réponse correcte et F une réponse incorrecte, exemple : VFFV signifie que la première et la quatrième réponses sont correctes et la deuxième et la troisième sont incorrectes.

1. Etablir la liste des seize résultats possibles (que l'on pourra présenter à l'aide d'un arbre).
2. Quelle est la probabilité pour que le candidat donne la bonne réponse :
   a. à la première question posée?
   b. à une seule des quatre questions posées ?
   c. aux quatre questions posées ?
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses correctes données par le candidat.
   a. Donner les différentes valeurs prises par X.
   b. Donner la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X.
4. Un candidat sera reconnu apte s'il donne au moins trois réponses correctes. Quelle est la probabilité qu'un candidat répondant au hasard soit reconnu apte ?