تمرين الفضاء منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

1) أثبت أن : $x^2+y^2+z^2-10x+2y-4z+5=0$ معادلة لفلكة (S) محددا مركزها Ω وشعاعها R .

2) بين أن المستوى $(P):x-y+2z+2=0$ يقطع الفلكة (S) وفق دائرة مركزها ω وشعاعها r يتعين تحديدهما .

مسألة

الجزء الأول g دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ بما يلي : $g(t)=\dfrac{t}{1+t}-\ln(1+t)$.

$\left(C_g\right)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) أدرس تغيرات الدالة g على $]-1;+\infty[$ و أحسب $g(0)$.

2) استنتج أن $\left(\forall t\in]-1;+\infty[\right)\ g(t)\le 0$.

3) أ- أحسب $\lim\limits_{t\to-1^+}g(t)$ ماذا تستنتج؟(يمكن وضع $X=t+1$ وتطبيق $\lim\limits_{X\to0^+}X\ln X=0$).

ب- أحسب $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{g(t)}{t}$ ماذا تستنتج؟ .

4) أنشئ $\left(C_g\right)$.

الجزء الثاني f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)$.

$\left(C_f\right)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ (تذكير : $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$).

2) تحقق أنه لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f(x)=\dfrac{x}{e^x}+e^{-x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$ و $f(x)=\left(1+e^{-x}\right)\dfrac{\ln\left(1+e^{x}\right)}{1+e^{x}}$.

3) اختر إحدى النتيجتين لحساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.ماذا تستنتج؟ .(تذكير : $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$).

4) أ- بين أنه لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=e^{-x}g\left(e^{x}\right)$.

ب- استنتج جدول تغيرات الدالة f .

5) أنشئ $\left(C_f\right)$.

الجزء الثالث (إختياري) F دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

1) أدرس تغيرات F على $\mathbb{R}$ (تحديد النهايات غير مطلوب).

2) أ- تحقق أن : $\left(\forall t\in\mathbb{R}\right)\dfrac{1}{1+e^t}=1-\dfrac{e^t}{1+e^t}$.

ب- أحسب : $\int_0^x\dfrac{dt}{1+e^t}$.

ج- باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $F(x)$.

د- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)F(x)=\ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)-f(x)+2\ln2$.

3) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

4) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)-x$.ماذا تستنتج؟ .(لاحظ أن : $F(x)=x-\ln\left(1+e^{x}\right)-f(x)+2\ln2$)

الجزء الرابع (للبحث في المنزل)

$\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية معرفة بما يلي: $u_n = f(1)+f(2)+.....+f(n)$ أو $u_n = \sum_{k=1}^{n} e^{-k}\ln\left(1+e^{k}\right)$.

1) أدرس رتابة المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2) أ- بين أنه لكل k بحيث $1\le k\le n$ لدينا : $f(k)\le\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$.

ب- استنتج أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ u_n\le F(n)$.

ج- استنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة واحسب نهايتها .

Hassan205@gmail.com