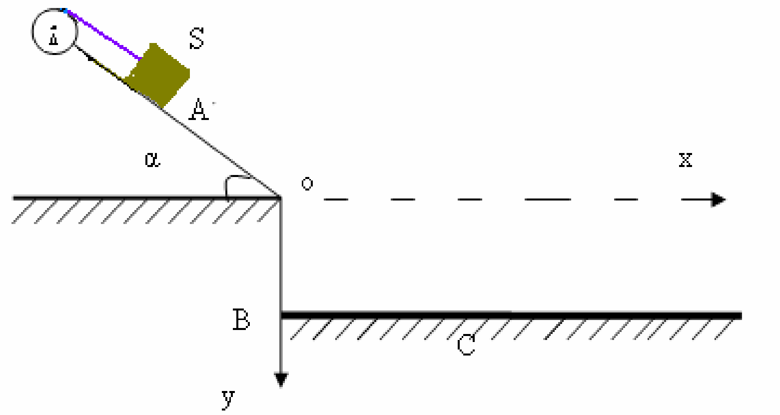
I)

نعتبر جسما (S) صلبا كتلته $m=0,25kg$ ، يمكنه أن ينزلق بدون احتكاك فوق مستوى مائل بزاوية $\alpha=30°$ بالنسبة للخط الأفقي .

الجسم (S) مثبت في طرف حبل ذي كتلة مهملة وغير قابل للتمدد و يدور بدون انزلاق على مجرى بكرة شعاعها $r=5cm$ قابلة للدوران حول محور أفقي وثابت Δ .

نعطي عزم قصور البكرة بالنسبة للمحور Δ: $J_\Delta=2,5.10^{-3}kg.m^2$ و شدة الثقالة: $g=10m/s^2$.



1) نطلق الجسم (S) من النقطة A بدون سرعة بدئية فينزلق فوق المستوى المائل مسببا دوران البكرة .

1-1: احسب تسارع الجسم (S) واستنتج طبيعة حركته.

1-2: احسب سرعة الجسم (S) في النقطة O علما أن : $OA=2m$.

2) في النقطة O ينفلت الحبل من البكرة فيسقط الجسم (S) في النقطة C من علو $OB=75cm$.

2-1: أعط المعادلتين الزمنيتين لحركة الجسم (S) في المعلم (o,x,y).

2 -2: استنتج : ا) مدة السقوط الحر للجسم (S).

ب) المسافة BC.

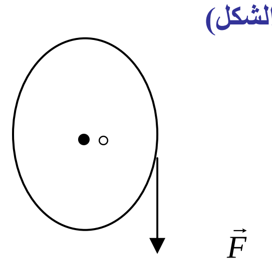
3) عندما ينفلت الحبل من البكرة تخضع هذه الأخيرة إلى مزدوجة مقاومة عزمها ثابت $M_\Delta=-7,5\times10^{-2}N.m$ ليتوقف بعد انجاز عدة دورات .

3-1: احسب التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للبكرة.

3-2: ما عدد الدورات التي أنجزتها البكرة خلال مدة الكبح ؟

II)

يمكن لقرص متجانس كتلته m وشعاعه $r=5cm$ ، أن يدور حول محوره الأفقي Δ بدون احتكاك .نلف على محيط القرص خيطا رقيقا. (انظر الشكل)



عزم قصور القرص بالنسبة لمحور الدوران : $J_\Delta=\frac{1}{2}m.r^2$.

1) نطبق على القرص قوة $\vec{F}$ مماسة لمحيطه وثابتة ، شدتها تساوي نصف شدة الوزن P للقرص مسببة دوران القرص حول محوره Δ . علما أنه في اللحظة $t=o$ ، $\theta=0$ والسرعة البدئية منعدمة.

1-1: أوجد تعبير التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للبكرة بدلالة r و g ثم احسب قيمته .

1-2: ما المدة الزمنية التي ينجز فيها القرص دورة كاملة ؟

1 -3: ما السرعة الزاوية بعد هذه المدة ؟

2) عندما تصير سرعة القرص 10دورات في الثانية، نحذ ف تأثير الخيط . نلاحظ أنه نتيجة التأثيرات العديدة التي تسبب كبح القرص ،فإن سرعته تتناقص لتنعدم بعد 5 دقائق.

2-1: احسب عدد الدورات التي ينجزها القرص قبل توقفه النهائي (باعتبار لحظة الانفصال عن القرص هي اللحظة $t=o$.)

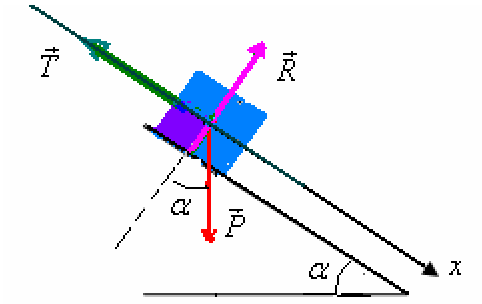
2-2: عبر بدلالة m و r عن العزم M لمزدوجة الكبح الذي نعتبره ثابتا . نعطي : $g=10m/s^2$

Sbiro abdelkrim mail : sbiabdou@yahoo.fr

تصحيح

I – 1) 1-1: خلال حركته على المستوى المائل يخضع الجسم S للقوى التالية:

$\vec{P}$: وزنه. و $\vec{R}$: القوة المقرونة بتأثير سطح التماس وهي $\perp$ عليه لأن الاحتكاك مهمل.



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S نحصل على: $\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m.\vec{a}_G$

بما أن حركة الجسم S مستقيمية فإن: $\vec{a}_G=a.\vec{i}$: $\vec{i}$ المتجهة الواحدية التي توجه المحور $0x$.

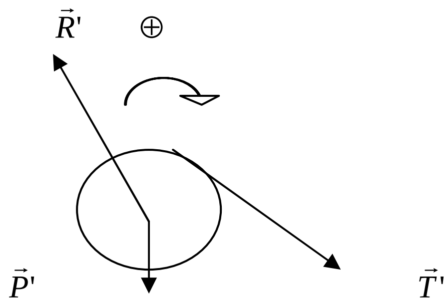
نسقط هذه العلاقة على المحور $0x$. $+P\sin\alpha+0-T=m.a$ ومنه نستخرج:

(1) $\boxed{T=mg\sin\alpha-ma}$

وبتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة التي أثناء دورانها تخضع للقوى التالية :

$\vec{P}'$: وزن البكرة. و R' : القوة المقرونة بتأثير محور الدوران على البكرة ثم $\vec{T}'$: توتر الخيط.

تكتب العلاقة المعبرة عن القانون الثاني لنيوتن كما يلي : $M\vec{P}'_\Delta+MR'_\Delta+M\vec{T}'_\Delta=J_\Delta.\ddot{\theta}$ وباعتبار المنحى الموجب للدوران:



تصبح العلاقة السابقة كما يلي : $0+0+T'.r=J_\Delta.\ddot{\theta}$

لأن: $\vec{P}'$ و $\vec{R}'$ تتقاطعان مع محور الدوران ومنه : $T'=\dfrac{J_\Delta.\ddot{\theta}}{r}$ (2)

ولدينا من جهة $T=T'$ لان الخيط المستعمل غير قابل للتمدد وذي كتلة مهملة ومن جهة أخرى $a=r\ddot{\theta}$ لان الخيط يدور بدون انزلاق على البكرة.إذن: $\ddot{\theta}=\dfrac{a}{r}$ إذن: $mg.\sin\alpha-ma=\dfrac{J_\Delta.a}{r^2}$ أي:

$$a=\frac{m.g.\sin\alpha}{m+\frac{J_\Delta}{r^2}}$$

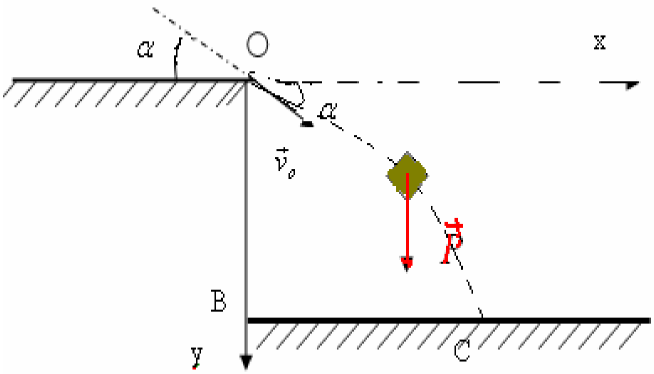
ت.ع: $a=\dfrac{0,25.10.0,5}{0,25+\dfrac{2,5.10^{-3}}{25.10^{-4}}}=\dfrac{1,25}{0,25+\dfrac{25.10^{-4}}{25.10^{-4}}}=\dfrac{1,25}{1,25}=1m.s^{-2}$

للجسم S مسار مستقيمي وتسارع ثابت إذن حركته مستقيمية متغيرة بانتظام.

2-1 :- بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن بين الموضعين A و O :

$v_O{}^2-v_A{}^2=2.a.OA$ وبما أن: $v_A=0$: $v_0=\sqrt{2.a.OA}=\sqrt{2\times1\times2}=2m/s$

2) عندما يغادر الجسم S المستوى المائل في النقطة O يصبح خاضعا لتأثير وزنه $\vec{P}$ فقط.



* متجهة السرعة $\vec{v}_0$ في النقطة O :

$\vec{V}_0$: لها أحداثيتين في المعلم (o,x,y) وتكون زاوية α مع المحور $0x$.

$\vec{V}_0 \quad V_Ox=V_0.co\alpha$

$V_Oy=V_O\sin\alpha$

العلاقة الأساسية للديناميك(القانون الثاني لنيوتن) تكتب كما يلي : $\vec{P}=m.\vec{a}_G$

* إسقاطها على المحور $oy \Leftarrow +P=m.a_y$ أي $m.g=ma_y \Leftarrow a_y=g$ الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام. وبذلك تكون المعادلة الزمنية للحركة حسب هذا المحور : $y=\frac{1}{2}a_y.t^2+v_{oy}.t+y_0$ أي:

$$y=\frac{1}{2}g.t^2+v_o\sin\alpha.\times t \quad \Leftarrow \quad \underline{y=5t^2+t}$$

* إسقاطها على المحور $ox \Leftarrow 0=m.a_x$ أي: $\Leftarrow a_x=0$ الحركة مستقيمية منتظمة تتم بسرعة ثابتة

وهي: $v_x=v_{ox}=v_o.\cos\alpha$ إذن :المعادلة الزمنية للحركة حسب ox هي: $x=v_o\cos\alpha\times t$

$$\boxed{x=1,73t}$$

2-2) لتكن tc مدة السقوط الحر للجسم S . عند وصول الجسم S إلى النقطة C يكون لدينا:

$y=yc=y_B=OB$ نعوض في(3) : $0,75=5tc^2+tc$

أي : $5tc^2+tc-0,75=0$

هذه المعادلة لها حلين: $tc=\dfrac{-1\pm4}{10}$ أي $0,3$ و $-0,5$ وبما أن $t\rangle0$ فإن: $\underline{tc=0,3s}$

تحديد المسافة BC

لدينا : $BC=xc$ ونعوض في المتغيرة x t بمدة السقوط tc :

$xc=1,73tc=1,73.0,3=51,9m\approx52m$

3) 1-3) نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة بعد انفلات الحبل:فهي تخضع لوزنها $\vec{P}$ وتأثير محور الدوران $\vec{R}$ بالإضافة إلى المزدوجة المقاومة ذات العزم $M_\Delta=-7,5\times10^{-2}N.m$

إذن: $M_{\Delta} = J_{\Delta}.\ddot{\theta}'$ أي: $M_{\Delta} + M\vec{P}_{\Delta} + M\vec{R}_{\Delta} = J_{\Delta}.\ddot{\theta}'$

2-3 : في لحظة انفلات الحبل السرعة الزاوية للبكرة: $\omega_0 = \frac{v_o}{r} = \frac{2}{5.10^{-2}} = 40rad/s$

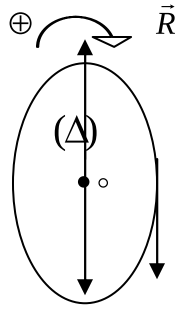
بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن : $\omega^2 - {\omega_o}^2 = 2.\ddot{\theta}'.\Delta\theta$ **مع السرعة الزاوية عند التوقف** $\omega = 0$ **و**

$\Delta\theta = 2\pi.n$ **بحيث** n **تمثل عدد الدورات التي أنجزتها الاسطوانة قبل التوقف.** $n = \frac{-\omega^2}{4.\pi.\ddot{\theta}'} = 4,25$

(II 1)

1-1)بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة التي تخضع للقوى التالية:

$\vec{P}$: وزن البكرة.و $\vec{R}$:تأثير محور الدوران Δ ثم $\vec{F}$:القوة المطبقة على البكرة .



$$\sum M\vec{F}_{\Delta} = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

$$M\vec{F}_{\Delta} + M\vec{P}_{\Delta} + M\vec{R}_{\Delta} = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

نختار منحى موجبا للدوران (انظر الشكل)

وبما أن عزم $\vec{P}$ وعزم $\vec{R}$ منعدمان لان خطي تأثيرهما يتقاطعان مع محور الدوران(لا مقدرة لهما على إدارة البكرة) فإن العلاقة السابقة تصبح: $+F \times d + 0 + 0 = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$ **(1)**

مع : $\left[J_{\Delta} = \frac{1}{2}mr^2\right]$ **و** $[d = r]$ **و** $\left[F = \frac{m.g}{2}\right]$ **إذن العلاقة (1) تصبح:**

$\frac{m.g}{2}.r = \frac{1}{2}m.r^2.\ddot{\theta}$ **ومنه :** $\ddot{\theta} = \frac{g}{r}$ **ت.ع:** $\ddot{\theta} = \frac{10}{5.10^{-2}} = 200rad/s^2$

2-1) بما أن حركة البكرة دورانية متغيرة بانتظام متسارعة. المعادلة الزمنية للحركة تكتب كما يلي :

(a) $\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta} \times t^2 + \omega_0 t + \theta_0$ **في هذه العلاقة وحدة θ هي** rad.

عندما ينجز القرص دورة كاملة: $\theta = 2\pi$ **ومن خلال المعطيات :** $\theta_0 = 0$ **و** $\omega_0 = 0$ **إذن العلاقة(a) تصبح:**

$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta} \times t^2$ **ومنه**

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2 \times \theta}{\ddot{\theta}}} = \sqrt{\frac{2 \times 2\pi}{200}} = 0,25s}$$

3-1) من خلال دالة السرعة الزاوية : $\omega = \ddot{\theta} \cdot t + \theta_0$ **مع** $\theta_0 = 0$ **إذن :** $\omega = 200t$

وفي اللحظة $t = 0,25s$ **نحصل على :**

$$\boxed{\omega = 200.0,25 = 50rad/s}$$

2) 1-2 لتكن ω_1 السرعة الزاوية لدوران القرص في لحظة انفصاله عن الخيط أي ا للحظة التي تصير فيها سرعة القرص10دورات في الثانية. نعلم أن عدد الدورات في الثانية يمثل التردد N (لان الدور T هي المدة التي ينجز فيها القرص دورة واحدة . فبما أنه أصبح ينجز n دورة في 1s إذن 1 دورة سينجزها في $\frac{1}{n}$ وهو الدور T وهو مقلوب التردد وبالتالي عددا لدورات في الثانية n يعبر عن التردد N.)

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T_0} = 2.\pi.N}$$

إذن: $\omega_1 = 2\pi.N_1 = 2 \times 3,14 \times 10 = 62,8rad/s$ **ولتكن ω_F السرعة الزاوية للقرص عند التوقف** $\omega_F = 0$.

بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن على القرص بين لحظة انفصاله عن الخيط ولحظة توقفه عن الحركة :

$$\omega_F^{\ 2} - \omega_1^{\ 2} = 2.\ddot{\theta}'\Delta\theta \qquad (1)$$

مع $\Delta\theta = 2\pi$ n و $\omega_F = 0$ وهكذا (1) تصبح $-\omega_1^{\ 2} = 4.\ddot{\theta}'\pi.n$ إذن: $n = \dfrac{-\omega_1^{\ 2}}{4.\pi.\ddot{\theta}'}$ ومن

خلال دالة السرعة الزاوية(باعتبار لحظة الانفصال هي اللحظة $t = o$) لدينا : $\omega_F = \ddot{\theta}'\times t + \omega_1$ مع: بما أنه يتم

التوقف بعد 5دقائق: $\ddot{\theta}' = \dfrac{-\omega_1}{t}$ (c)مع : $\omega_1 = 62{,}8 rad/s^2$ و $t = 5mn = 300s$ و : $\omega_F = 0$

نعوض(c) في :(b) فنحصل على:

$$\boxed{n = \frac{\omega_1.t}{4.\pi} = \frac{62{,}8\times 300}{4\times 3{,}14} = 1500tr}$$

2-2) بتطبيق ع.أ.للتحريك على البكرة في المرحلة الأخيرة(بعد انفصالها عن الخيط) نحصل على :

$M\vec{P}_\Delta + M\vec{R}_\Delta + M = J_\Delta.\ddot{\theta}' \Leftarrow 0 + 0 + M = \dfrac{1}{2}m.r^2.\ddot{\theta}'$ مع : $\ddot{\theta}' = \dfrac{-\omega_1}{t}$ و $\omega_1 = 62{,}8 rad/s$

و $t = 5mn = 300s$ إذن: $\ddot{\theta}' = \dfrac{-62{,}8}{300} \approx -0{,}21 rad/s^2$ إذن: $M = -0{,}105.m\times r^2$

Sbiro abdelkrim **email:** sbiabdou@yahoo.fr