

الهندسة الفضائية

القدرات المنتظرة

- * تعرف وتمثيل أجزاء في الفضاء على المستوى.
- * إدراك حالات المماثلة وحالات اللامماثلة بين مفاهيم وخاصيات في المستوى ونظيراتها في الفضاء.
- * توظيف خاصيات الهندسة الفضائية في حل مسائل مستفاد من الواقع.

التوازي في الفضاء

1- تذكير

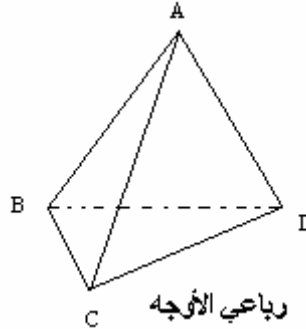
1- التمثيل المستوي للأشكال في الفضاء

* الرسومات في الفضاء لا تحترم طبيعة الأشكال

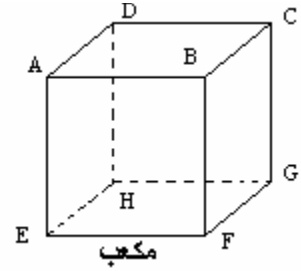


* لرسم أشكال في الفضاء نتبع التقنية التالية

- الخطوط المرئية في الواقع نرسمها بخطوط متصلة
- الخطوط الغير المرئية في الواقع نمثلها بخطوط متقطعة
- المستقيمات المتوازية في الواقع نمثلها بمستقيمات متوازي في الرسم
- النقط المستقيمة تمثل بنقط مستقيمة في الرسم.
- قطعان متقايستان حاملهما متوازيان نمثلهما بقطعتين متقايستين حاملهما متوازيين



رباعي الأوجه



مكعب

2- موضوعات و تعاريف

الفضاء مجموعة عناصرها تسمى نقط نرسم لها بالرمز (E) المستقيمات و المستويات أجزاء فعلية من الفضاء

أ- موضوعة 1

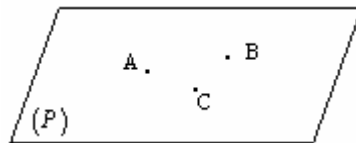
كل نقطتين مختلفتين A و B في الفضاء تحدد مستقيما وحيد نرسم له (AB)

تعريف

نقول عن عدة نقط أنها مستقيمة في الفضاء إذا كانت تنتمي إلى نفس المستقيم

ب- موضوعة 2

كل ثلاث نقط غير مستقيمة A و B و C في الفضاء تحدد مستوى وحيد نرسم له (ABC) أو (P)

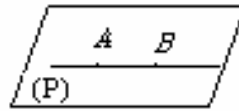


تعريف

- * نقول عن عدة نقط أنها مستوائية في الفضاء إذا كانت تنتمي إلى نفس المستوى.
- * نقول عن مستقيمين (أو مستقيمات) أنهما مستويين (أو مستوائية) إذا كانا (أو كانوا) ضمن نفس المستوى.

ج- موضوعة 3

إذا انتمت نقطتان مختلفتان من مستقيم (D) إلى مستوى (P) فان (D) ضمن (P).

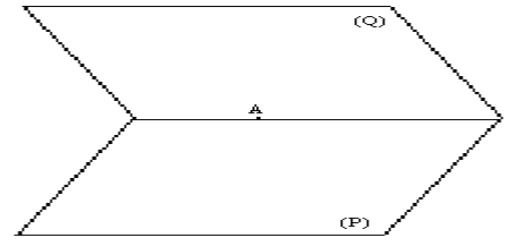
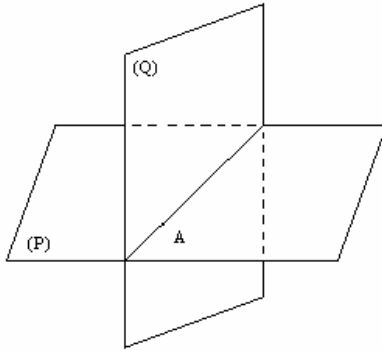


ملاحظة هامة

جميع خاصيات الهندسة المستوية تبقى صالحة في كل مستوى من مستويات الفضاء و كل مستقيم من مستقيماته.

د- موضوعة 4

إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فانهما يتقاطعان وفق مستقيم يمر من هذه النقطة.



ذ- نتائج

نتيجة 1

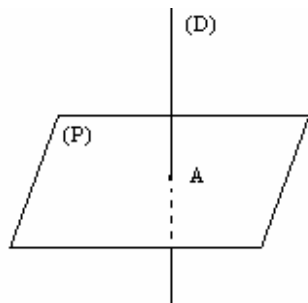
كل مستقيم ونقطة خارجه يحددان مستوى وحيدا في الفضاء

نتيجة 2

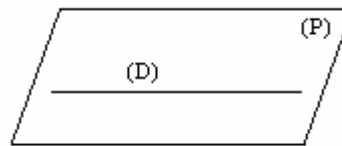
كل مستقيمين متقاطعين في الفضاء يحددان مستوى وحيد في الفضاء

3- الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى

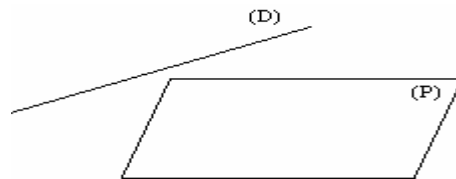
ليكن (D) مستقيم و (P) مستوى من الفضاء
لدينا ثلاث وضعيات ممكنة
الوضعية 1: (D) يخترق (P)

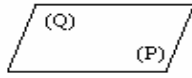
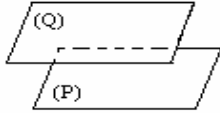
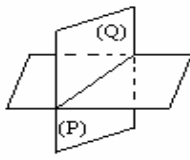


الوضعية 2: $(D) \subset (P)$



الوضعية 3: (D) و (P) منفصلان (أي ليست لهما أية نقطة مشتركة)





4- الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

ليكن (P) و (Q) مستويين في الفضاء. لدينا ثلاث حالات
* (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم

* (P) و (Q) منفصلان

(أي ليست لهما أية نقطة مشتركة)

* (P) و (Q) منطبقان

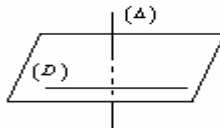
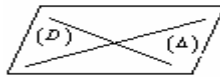
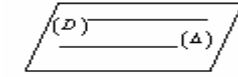
5- الأوضاع النسبية لمستقيمين مختلفين

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين مختلفين. هناك ثلاث حالات

* (D) و (Δ) مستويان ومنفصلان

* (D) و (Δ) مستويان ومتقاطعان

* (D) و (Δ) غير مستويين



تمرين

ليكن $EFGH$ رباعي الأوجه النقطة I من $[FG]$ مخالفة عن

F و G و النقطة J من $[EG]$ مخالفة عن E و G و النقطة K من $[EH]$ مخالفة عن E و H

هل (EI) و (JK) متقاطعان

تمرين

$ABCDEFGH$ مكعب

حدد تقاطع (ACG) و (BDG)

لبرهنة على استقامة نقط في الفضاء ، نبحث غالبا على مستويين متقاطعين و نبين أن هذه النقط مشتركة

تمرين $ABCD$ رباعي الأوجه و P و Q و R نقط من $[AB]$

و $[AC]$ و $[AD]$ حيث (PR) يقطع (BD) في J و (PQ) يقطع (BC) في K و (QR) يقطع (CD) في I

أثبت أن J و K و I مستقيمة

التوازي في الفضاء

1- المستقيمات المتوازية

أ- تعريف

نقول إن مستقيمين (D) و (Δ) متوازيان في الفضاء إذا تحقق الشرطان التاليان



- أن يكون (D) و (Δ) مستوائيين

- أن يكون (D) و (Δ) منفصلان أو منطبقان

نكتب $(\Delta) \parallel (D)$

ملاحظة

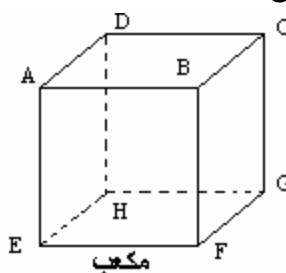
لا يكفي أن يكون (D) و (Δ) منفصلين لكي يكون متوازيين

مثال

(BC) و (AE) منفصلان و لكن غير متوازيين.

$(BC) \parallel (AD)$

$(EF) \parallel (DC)$



ب- مبرهنة

من نقطة معلومة خارج مستقيم يمر مستقيم وحيد يوازيه في الفضاء

البرهان

لدينا $(D) \notin A$ و بالتالي يوجد مستوى

وحيد (P) يحتوي على A و (D)

وحسب موضوعة اقليدس في المستوى (P) ، يمر مستقيم وحيد

(Δ) يوازي (D)

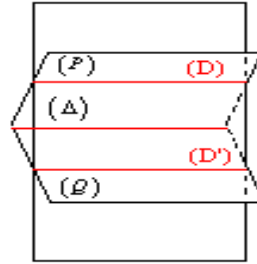
إذن (D) و (Δ) متوازيان في الفضاء

ج- مبرهنة

كل مستقيمين متوازيين قطعاً في الفضاء يحددان مستوى وحيداً

د- مبرهنة (نقلها)

إذا احتوى مستويان متقاطعان على مستقيمين متوازيين قطعاً فان تقاطعهما هو مستقيم مواز لهذين المستقيمين.



ذ- مبرهنة

إذا كان مستقيمان متوازيين في الفضاء فن كل مستقيم يوازي أحدهما يوازي الآخر

ملاحظة

إذا كان مستقيمان متوازيين فكل مستوى يقطع أحدهما يقطع الآخر

تمرين

ليكن $ABCDE$ هرماً قاعدته متوازي أضلاع لتكن B' و C' منتصفي $[AB]$ و $[AC]$ على التوالي.

أنشئ الشكل

1- أثبت أن $(DE) \parallel (B'C')$

2- ليكن (Δ) تقاطع المستويين (ABC) و (ADE)

بين أن $(\Delta) \parallel (B'C')$

2- توازي مستقيم و مستوى

أ- تعريف

يكون مستقيم (D) موازياً لمستوى (P) إذا و فقط إذا كان (D) و (P) منفصلان أو (D) ضمن (P)

نكتب $(D) \parallel (P)$

ب- مبرهنة

يكون مستقيم (D) موازياً لمستوى (P) إذا و فقط إذا وجد مستقيم ضمن (P) يوازي (D)

تمرين

ليكن $ABCDEFGH$ مكعباً . I و J و K منتصفات $[AB]$

و $[EF]$ و $[HG]$ على التوالي

أثبت أن (HI) يوازي المستوى (JKC)

3- توازي مستويين

أ- تعريف

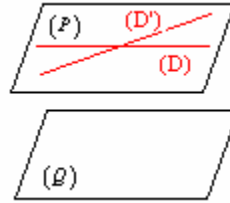
يكون مستويان (P) و (Q) متوازيين في الفضاء إذا و فقط إذا كانا منطبقين أو منفصلين.

نكتب $(P) \parallel (Q)$

إذا كان $(P) \parallel (Q)$ فإن كل مستقيم ضمن أحدهما يوازي المستوى الآخر.

ب- مبرهنة

يكون مستويان متوازيين في الفضاء إذا و فقط إذا اشتمل أحدهما على مستقيمين متقاطعين يوازيين المستوى الآخر



ج- مبرهنة

إذا وازى مستويان مستوي ثالثا فانهما يكونان متوازيين

د- مبرهنة

من نقطة في الفضاء يمر مستوى و حيد مواز لمستوى معلوم

البرهان

ليكن (P) مستوى و A نقطة في الفضاء

نعتبر (D) و (Δ) متقاطعين ضمن المستوى (P)

يوجد مستقيم وحيد (D') مار من A و يوازي (D)

يوجد مستقيم وحيد (Δ') مار من A و يوازي (Δ)

(D') و (Δ') يحددان مستوى وحيد (Q)

(Q) يوازي (P)

ذ- نتائج

- إذا توازي مستويان فإن كل مستقيم يخترق أحدهما يخترق الآخر

- إذا توازي مستويان فإن كل مستوى يقطع أحدهما يقطع الآخر

- إذا توازي مستويان فإن كل مستقيم يوازي أحدهما يوازي الآخر

تمرين

ليكن (P) و (Q) مستويين متوازيين قطعاً . نعتبر $A \in (P)$

و BCD مثلث ضمن (Q) . لتكن I و J و K منتصفات $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$ على التوالي. المستقيم

(CK) يخترق المستوى (P) في R .

1- أنشئ الشكل

2- أثبت أن المستوى (IJK) يوازي (P)

3- أثبت أن $(CD) \parallel (AR)$

تمرين

ليكن $ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات و I منتصف $[GH]$

1- لتكن $(EI) \cap (FH) = \{M\}$

بين أن المستويين (AEI) و (AFH) يتقاطعان وفق (AM)

2- أ- بين أن النقط E و F و D و C مستوائية

ب- بين أن $(CF) \parallel (DE)$

3- بين أن $(CFH) \parallel (BDE)$

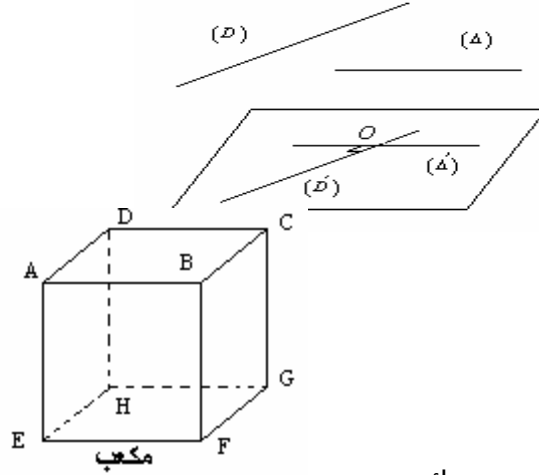
4- بين أن (CI) يخترق المستوى (ADH)

التعامد في الفضاء

I- تعامد مستقيمين في الفضاء

1- تعريف

نقول إن مستقيمين (D) و (Δ) متعامدان في الفضاء إذا و فقط إذا كان الموزيان لهما و الماران من نقطة O في الفضاء متعامدين. نكتب $(D) \perp (\Delta)$



مثال مكعب $ABCDEFGH$

$$(AD) \perp (AE)$$

$$(AD) \perp (CG)$$

$$(EF) \perp (DH)$$

ملاحظة

مستقيمان متعامدان يمكن أن يكونا غير مستوائيين

تمرين

$ABCD$ رباعي الأوجه حيث $BD = DC$ و I و J و K منتصفات $[AB]$ و $[AC]$ و $[CB]$ على التوالي بين أن $(IJ) \perp (DK)$

2- خاصيات

خاصة 1

إذا كان مستقيمان متوازيين فكل مستقيم عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر

خاصة 2

إذا كان مستقيمان متعامدين فكل مستقيم مواز لأحدهما يكون عموديا على الآخر

ملاحظة

يمكن لمستقيمين أن يكون عموديين على مستقيم ثالث دون أن يكونا متوازيين.

II- تعامد مستقيم و مستوى في الفضاء

1- مبرهنة

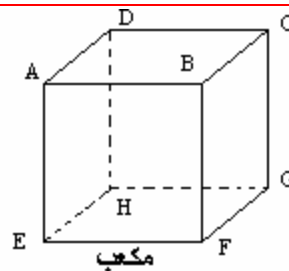
إذا كان مستقيم (D) عمودي على مستقيمين متقاطعين ضمن مستوى (P) فإن (D) عمودي على جميع مستقيمت المستوى (P)

2- تعريف

نقول إن المستقيم (D) عمودي على المستوى (P) إذا و فقط إذا (D) عموديا على جميع مستقيمت المستوى (P) .

3- مبرهنة

يكون مستقيم (D) عمودي على مستوى (P) إذا و فقط إذا كان المستقيم (D) عمودي على مستقيمين متقاطعين ضمن المستوى (P)



مثال مكعب $ABCDEFGH$

$$(AD) \perp (ABE)$$

$$(AD) \perp (CHG)$$

4- خاصيات

خاصة 1

إذا كان مستويان متوازيين فإن كل مستقيم عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر

خاصة 2

إذا كان مستقيمان متوازيين فإن كل مستوى عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر

خاصة 4

يكون مستقيمان متعامدين إذا و فقط إذا كان أحدهما عموديا على مستوى يتضمن الآخر

خاصة 5

يكون مستويان متوازيين إذا و فقط إذا كانا عموديين على نفس المستقيم

تمرين

مكعب $ABCDEFGH$

أثبت أن $(EB) \perp (DF)$ ثم أثبت أن $(EBG) \perp (DF)$

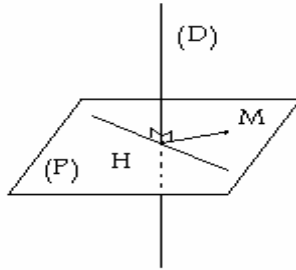
تمرين

ليكن (C) دائرة من المستوى (P) . نعتبر $[AB]$ قطرا لـ (C) و (Δ) العمودي على (P) في A .
ليكن $S \in (\Delta)$ حيث $S \neq A$ و $M \in (C)$ و $M \neq B$;
أثبت أن $(MB) \perp (SM)$.

5- مبرهنات

مبرهنة 1

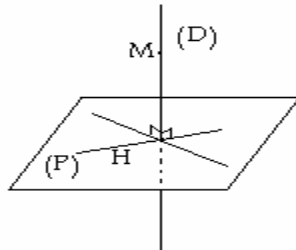
من كل نقطة في الفضاء يمر مستوى وحيد عمودي على مستقيم معلوم.



H المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (D)

مبرهنة 2

من كل نقطة في الفضاء يمر مستقيم وحيد عمودي على مستوى معلوم.



H المسقط العمودي للنقطة M على المستوى (P)

III- تعامد مستويين

تعريف

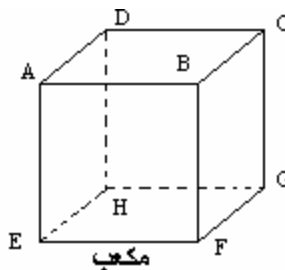
نقول ان المستويين (P) و (Q) متعامدان اذا و فقط اذا كان أحدهما يتضمن مستقيما عموديا

على الآخر نكتب $(P) \perp (Q)$

مثال مكعب $ABCDEFGH$

$$(ADC) \perp (ABE)$$

$$(ADF) \perp (CHG)$$



ملاحظة

إذا تعامد مستويين في الفضاء فلا يعني أن كل مستقيم ضمن أحدهما عمودي على المستوى الآخر.

تمرين

ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين في A ضمن مستوى (P) و I منتصف $[BC]$. لنكن S نقطة من المستقيم العمودي على (P) في A حيث $S \neq A$

- 1- أثبت أن $(SAI) \perp (SCI)$
2- ليكن H المسقط العمودي لـ A على (SI)
أثبت أن $(AH) \perp (SC)$

تمرين

مكعب $ABCDEFGH$
أثبت أن $(HEB) \perp (AGF)$

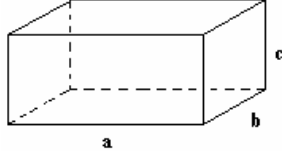
تمرين

- في الفضاء نعتبر ABC مثلثا قائم الزاوية في A ضمن مستوى (P) . لتكن D مائلة B بالنسبة لـ A ، و S نقطة خارج (P) حيث $SB = SD$. لتكن I و J منتصفي $[SD]$ و $[DC]$ على التوالي
- 1- بين أن $(AB) \perp (SAC)$ استنتج أن $(P) \perp (SAC)$
2- بين أن $(AB) \perp (IJ)$

المساحات و الحجوم

1- متوازي المستطيلات

ليكن a و b و c طول و عرض و ارتفاع متوازي المستطيلات

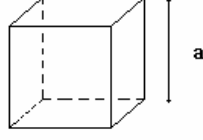


$$S = 2(ab + bc + ca) \text{ : المساحة}$$

$$V = abc \text{ : الحجم}$$

2- المكعب

ليكن a طول حرف المكعب

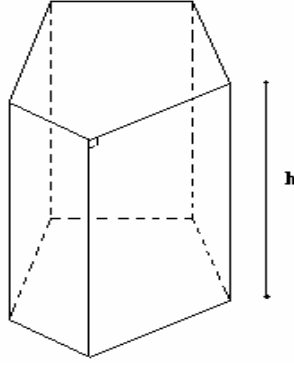


$$S = 6a^2 \text{ المساحة الكلية}$$

$$V = a^3 \text{ الحجم}$$

3 - الموشور القائم

أ- ليكن h ارتفاع موشور قائم و l و B محيط و مساحة قاعدته على التوالي.



$$S = l \times h \text{ * المساحة الجانبية}$$

$$\text{* المساحة الكلية}$$

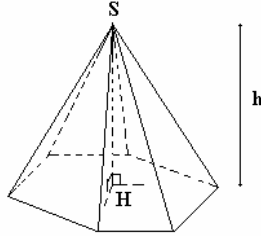
$$S_T = l \times h + 2B$$

$$V = B \times h \text{ * الحجم}$$

4- الهرم

أ- ليكن h ارتفاع هرما رأسه S

$h = SH$ حيث H المسقط العمودي لـ S على المستوى



المتضمن للقاعدة. ليكن B

مساحة قاعدة الهرم.

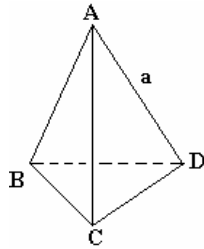
$$V = \frac{1}{3} B \cdot h \text{ : حجم الهرم}$$

5 - رباعي الأوجه المنتظم

ليكن a طول حرف رباعي الأوجه منتظم

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ المساحة الجانبية}$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \text{ الحجم}$$

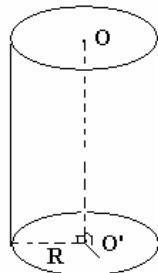


6 - الأسطوانة القائمة

ليكن h ارتفاع الاسطوانة و R شعاع قاعدتها

المساحة الجانبية هي $S_L = 2\pi R h$

الحجم هو $V = \pi R^2 h$



6- الفلكة

ليكن R شعاع الفلك

المساحة هي: $S = 4\pi R^2$

الحجم هو: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

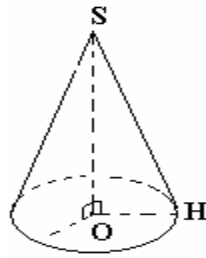
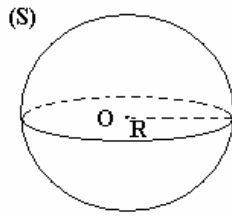
7 - المخروطي الدوراني

ليكن R شعاع القاعدة لمخروط دوراني

المساحة الجانبية هي $S_L = \pi R \cdot SH$

الحجم: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$h = OS$



تمرين $ABCD$ رباعي الأوجه حيث $BD = DC$ و I و J و K منتصفات $[AB]$ و $[AC]$ و $[CB]$ على التوالي

بين أن $(IJ) \perp (DK)$

تمرين مكعب $ABCDEFGH$

أثبت أن $(EB) \perp (DF)$ ثم أثبت أن $(EBG) \perp (DF)$

تمرين ليكن (C) دائرة من المستوى (P) . نعتبر $[AB]$ قطرا لـ (C) و (Δ) العمودي على (P) في A .

ليكن $S \in (\Delta)$ حيث $S \neq A$ و $M \in (C)$ و $M \neq B$;

أثبت أن $(MB) \perp (SM)$.

تمرين ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين في A ضمن مستوى (P) و I منتصف $[BC]$. لتكن S نقطة

من المستقيم العمودي على (P) في A حيث $S \neq A$

3- أثبت أن $(SAI) \perp (SCI)$

4- ليكن H المسقط العمودي لـ A على (SI)

أثبت أن $(AH) \perp (SC)$

تمرين مكعب $ABCDEFGH$

أثبت أن $(HEB) \perp (AGF)$

تمرين في الفضاء نعتبر ABC مثلثا قائم الزاوية في A ضمن مستوى

(P) . لتكن D مائلة B بالنسبة لـ A ، و S نقطة خارج (P) حيث $SB = SD$. لتكن I و J منتصفتي

$[SD]$ و $[DC]$ على التوالي

3- بين أن $(AB) \perp (SAC)$ استنتج أن $(P) \perp (SAC)$

4- بين أن $(AB) \perp (IJ)$

تمرين ليكن $ABCD$ معيننا ضمن مستوى (P) حيث $BD = 3cm$ و $AC = 3cm$. لتكن S نقطة من

المستقيم العمودي على (P) في A حيث $SA = 8cm$

أحسب حجم الهرم $SABCD$

تمرين أحسب حجم فلكة مساحتها تساوي $1m^2$