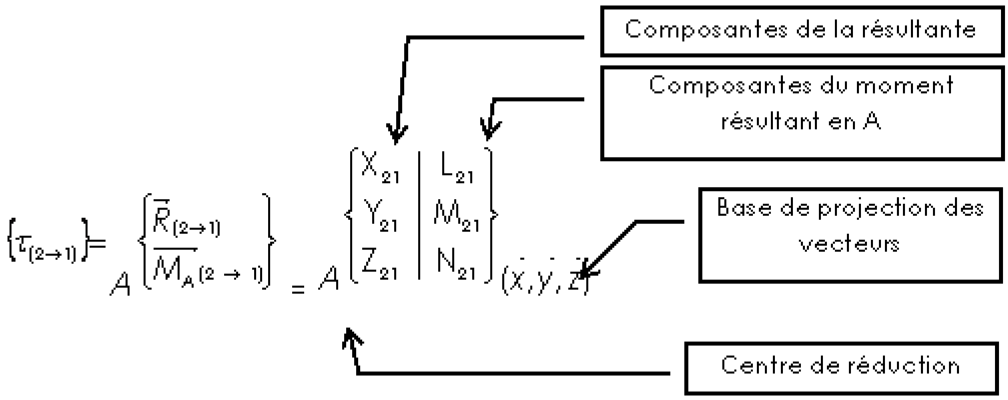
1 Définitions

Une A.M. est complètement définie lorsque nous connaissons les deux vecteurs $\vec{F}$ et $\overline{M_A}(\vec{F})$. Nous allons donc regrouper ces deux vecteurs dans une entité mathématique appelée **Torseur**.



Le toseur associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 2 sur un solide 1 sera noté :

<u>Remarques :</u>

- Le point A est un point quelconque.
- $\vec{R}_{(2\to1)}$ et $\overline{M_A}_{(2\to1)}$ sont appelés éléments de réduction au point A du torseur $\{\tau_{(2\to1)}\}$.

2 Torseurs particuliers

2.1 Torseur glisseur

On appelle **torseur glisseur au point A**, tout torseur associé à une action mécanique dont le moment résultant est nul en ce point.

$$\left\{\tau_{(2\to1)}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to1)} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

2.2 Torseur couple

On appelle **torseur couple**, tout torseur associé à une action mécanique dont la résultante est nulle.

$$\left\{\tau_{(2\to1)}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to1)} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} \neq \vec{0} \end{Bmatrix}$$

⏩ Les éléments de réduction d'un torseur couple sont les mêmes en tout point.

3 Opérations entre torseurs

3.1 Changement de centre de réduction

Soit : Ecriture au point B :

$$\left\{\tau_{(2\to1)}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to1)} \\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} \end{Bmatrix} \qquad \left\{\tau_{(2\to1)}\right\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to1)} \\ \overrightarrow{M_B}_{(2\to1)} = \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_{(2\to1)} \end{Bmatrix}$$

3.2 Somme de deux torseurs

Soientt : alors :

$$\left\{\tau_{(2\to1)}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to1)} \\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\tau_{(3\to1)}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(3\to1)} \\ \overrightarrow{M_A}_{(3\to1)} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\tau_{(2\to1)}\right\} + \left\{\tau_{(3\to1)}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to1)} + \vec{R}_{(3\to1)} \\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} + \overrightarrow{M_A}_{(3\to1)} \end{Bmatrix}$$

⏩ Pour pouvoir **additionner des torseurs, ils doivent tous être exprimés au même centre de réduction**. Il sera parfois nécessaire de réaliser, au préalable, un changement de centre réduction.

⏩ Les vecteurs doivent être exprimés dans la même base.

⏩ Les unités doivent être compatibles entre elles.

4 Torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison parfaite

Une **liaison mécanique** entre deux pièces dite **parfaite** est caractérisée par :

- Des volumes géométriquement parfaits et indéformables ,
- Des ajustements sans jeu ,
- Des contacts sans frottement.

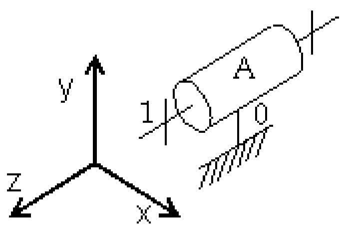
Ce modèle est certes, très théorique, mais bien pratique pour réaliser nos calculs de mécanique.

4.1 Méthode

⏩ Une Force $\vec{F}$, intégralement portée par $\vec{x}$, ne pourra être transmise par une liaison, que si cette dernière dispose d’un « obstacle » (de la matière en contact) dans cette même direction $\vec{x}$, interdisant la translation d’une pièce par rapport à l’autre.

⏩ Un Moment $\overrightarrow{M_A}$, intégralement porté par $\vec{y}$, ne pourra être transmis par une liaison, que si celle-ci dispose d’un « obstacle » dans cette même direction $\vec{y}$, interdisant la rotation d’une pièce par rapport à l’autre.

4.2 Application: La liaison pivot



L_{01} : Liaison pivot parfaite d’axe $(A,\vec{z})$

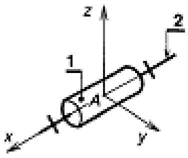
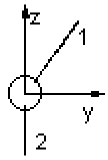
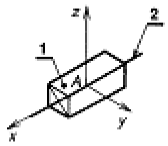
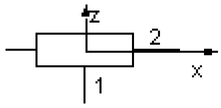
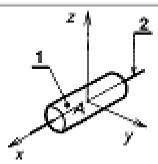
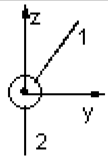
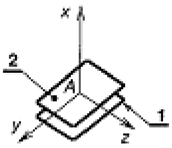
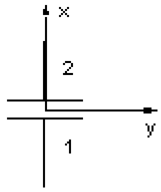
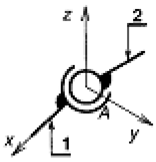
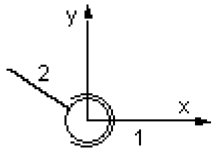
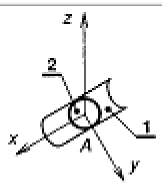
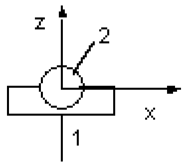
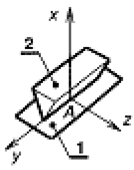
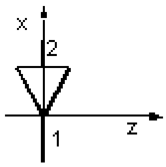
Mobilités

$$Tr\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right. \quad Rot\left|\begin{matrix}0\\0\\Rz\end{matrix}\right.$$

Torseur des actions mécaniques transmissibles par L_{01}

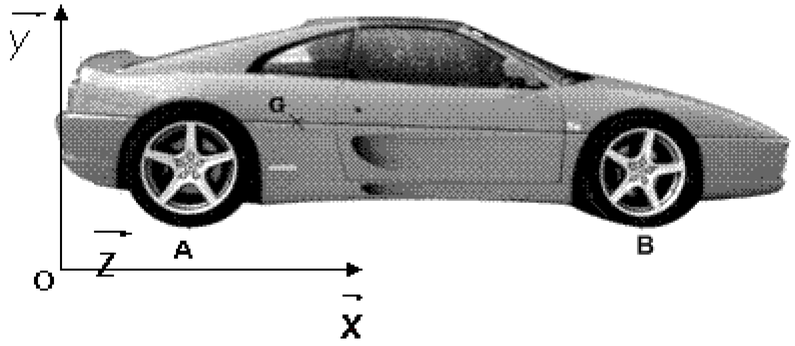
$$\{\tau_{(0\to1)}\} \; {}_{A}\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01}\\ Y_{01} & M_{01}\\ Z_{01} & 0\end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison parfaite

Désignation de la liaison	Schématisation spatiale	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible	Schématisation plane
Pivot d'axe (A, $\vec{x}$)		$Tr\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$ $Rot\begin{vmatrix}Rx\\0\\0\end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	
Glissière d'axe (A, $\vec{x}$)		$Tr\begin{vmatrix}Tx\\0\\0\end{vmatrix}$ $Rot\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	
Pivot glissant d'axe (A, $\vec{x}$)		$Tr\begin{vmatrix}Tx\\0\\0\end{vmatrix}$ $Rot\begin{vmatrix}Rx\\0\\0\end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	
Appui plan de normale (A, $\vec{x}$)		$Tr\begin{vmatrix}0\\Ty\\Tz\end{vmatrix}$ $Rot\begin{vmatrix}Rx\\0\\0\end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & M_{12} \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	
Rotule de centre A		$Tr\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$ $Rot\begin{vmatrix}Rx\\Ry\\Rz\end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	
Linéaire annulaire d'axe (A, $\vec{x}$)		$Tr\begin{vmatrix}Tx\\0\\0\end{vmatrix}$ $Rot\begin{vmatrix}Rx\\Ry\\Rz\end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	
Linéaire rectiligne de normale (A, $\vec{x}$) et de contact (A, $\vec{y}$)		$Tr\begin{vmatrix}0\\Ty\\Tz\end{vmatrix}$ $Rot\begin{vmatrix}Rx\\Ry\\0\end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	

<u>NB</u> : Le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison glissière hélicoïdale n'est pas modélisable aussi simplement.

Résolution d'un problème de statique par les torseurs.



Considérons une Ferrari de masse m=1250 Kg ; La voiture étant immobile, on désire connaître les actions mécaniques sur les pneumatiques au point A et au point B.

Le sol sera repéré 0, la roue arrière 1 et la roue avant 2.

1) Isolez la voiture et faites le bilan des actions mécaniques.

2) Ecrivez le bilan des actions mécaniques en chaque point sous forme de torseurs.

3) Déterminez si le problème est isostatique ou hyperstatique.

4) Connaissant les données suivantes : $\overline{AB} = 2900\ mm\ \ sur\ \overline{x}\ \ et\ 0\ \ mm\ sur\ \overline{y}$ et $\overline{GB} = 2000mm\ sur\ \vec{x}\ et\ -700mm\ sur\ \vec{y}$, appliquez le P.F.S. sous forme de torseur au point B .

5) Transportez tous les torseurs au point B et écrire les 3 équations d'équilibre issues du P.F.S.

6) Déterminez l'effort sur chaque roue arrière et chaque roue avant de la voiture.

7) Ecrire les torseurs sur les roues avant et arrière en colonne en remplaçant les inconnues.

Résolution

1) on isole la voiture et ses roues :

Bilan des actions mécaniques extérieures. *Il faudra rapidement vous passez d'utiliser ce tableau pour ne travailler qu'avec les torseurs.*

NOM	***P.A.***	***Direction***	***Sens***	***Norme***	***Nb d'inconnues***

$\vec{P}$	G	Verticale	Vers le bas	12500 N	0
$\overrightarrow{A_{0/1}}$	A	Liaison ponctuelle=> effort perpendiculaire au sol => $\overrightarrow{A_{0/1}}$ est vertical.	Vers la matière	?	1
$\overrightarrow{B_{0/2}}$	B	Liaison ponctuelle=> effort perpendiculaire au sol => $\overrightarrow{B_{0/2}}$ est vertical.	Vers la matière	?	1

2) De la même façon, on peut faire le bilan sous forme de torseurs ; on a alors 3 torseurs d'action mécanique exprimés dans le repère R=(O,x,y,z) :

$$_G\{\tau_{Poids}\}_R = \begin{Bmatrix} \vec{P} = -12500\,\vec{y} \\ \overrightarrow{M_{/G}\vec{P}} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$_A\{\tau_{0/1}\}_R = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{0/1}} = Ay\,\vec{y} \\ \overrightarrow{M_{/A}A_{0/1}} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$_B\{\tau_{0/2}\}_R = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{0/2}} = By\,\vec{y} \\ \overrightarrow{M_{/B}B_{0/2}} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Nota :Les inconnues sont remplacées par des variables positives.

3) Le problème est isostatique car on a 2 inconnues < 3 équations dans le plan.

4) Le P.F.S. ne change pas mais il s'exprime de la façon suivante sous forme de torseur :

Somme des torseurs en un point = 0

➔ $\boxed{\sum {}_B\{\tau\}_R = \{\vec{0}\}}$.

En développant dans notre cas, on obtient :

$$_B\{\tau_{Poids}\}_R + {}_B\{\tau_{0/1}\}_R + {}_B\{\tau_{0/2}\}_R = \{\vec{0}\}$$

NOTA : Tous les torseurs doivent être réduits au même point.

Pour pouvoir additionner ces torseurs, il faut maintenant tous les exprimer au point B ; on va donc les transporter de leur point respectif au point B.

5) Transport du torseur poids du point G au point B

$${}_{B}\{\tau_{poids}\}_{R} = {}_{B}\left\{\begin{matrix} \vec{P} = 12500\vec{y} \\ \overline{M_B \vec{P}} = \overline{M_G \vec{P}} + \overrightarrow{BG} \wedge \vec{P} \end{matrix}\right\}_{R}$$

avec $\overrightarrow{BG} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} -2000 \\ +700 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -12500 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 25000000 \end{vmatrix}$ en N.mm ou $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 25000 \end{vmatrix}$ en N.m

Donc ${}_{B}\{\tau_{poids}\}_{R} = {}_{B}\left\{\begin{matrix} \vec{P} = 12500\vec{y} \\ \overline{M_B \vec{P}} = 25000\vec{z} \end{matrix}\right\}_{R}$ (Effort en N et moments en N.m)

NOTA : Attention aux signes des vecteurs : $\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{BG}$ *(Erreur « classique » à éviter).*

Et $\overrightarrow{BG} \wedge \vec{P}$ *donne un résultat différent de* $\vec{P} \wedge \overrightarrow{GB}$ *au signe près et donc faux. Ne pas inverser !$*

Transport du torseur de 0/1 du point A au point B

$${}_{B}\{\tau_{0/1}\}_{R} = {}_{B}\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{A_{0/1}} = Ay\,\vec{y} \\ \overline{M_B \vec{A}_{0/1}} = \overline{M_A \vec{A}_{0/1}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{A_{0/1}} \end{matrix}\right\}_{R}$$

avec $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{A_{0/1}} = \begin{vmatrix} -2900 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ Ay \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2900\ Ay \end{vmatrix}$ en N.mm ou $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.9\ Ay \end{vmatrix}$ en N.m

Donc

${}_{B}\{\tau_{0/1}\}_{R} = {}_{B}\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{A_{0/1}} = Ay\ \vec{y} \\ \overline{M_B A_{0/1}} = -2.9\,Ay\ \vec{z} \end{matrix}\right\}_{R}$ (Effort en N et moments en N.m)

Le 3ème torseur ${}_{B}\{\tau_{0/2}\}_{R} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{B_{0/2}} = By\ \vec{y} \\ \overline{M_{/B} B_{0/2}} = \vec{0} \end{matrix}\right\}$ est déjà exprimé au point B, donc il ne nous reste plus qu'à appliquer le P.F.S. en additionnant chaque terme des torseurs.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} /\vec{x} : 0 = 0 \\ /\vec{y} : -12500 + Ay + By = 0 \\ /\vec{z} : 0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\sum \vec{M_{/B}\vec{F}} = \vec{0} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} /\vec{x} : 0 = 0 \\ /\vec{y} : 0 = 0 \\ /\vec{z} : 25000 - 2.9\,Ay = 0 \end{array} \right.$$

Nota :On remarque que l'on a que 2 équations utiles sur les 3 prévues lors de la vérification de l'isostatisme. Il suffit maintenant de résoudre pour déterminer nos inconnues.

6) $Ay = \dfrac{-25000}{-2.9} = 8620N$

et donc en utilisant l'équations des efforts: $-12500 + Ay + By = 0$,

on a : $By = 12500 - Ay = 12500 - 8620 = +3880N$.

Chacune des deux roues avant supporte 3880/2 = 1940 N et chacune des deux roues arrière supporte 8620/2 = 4310 N.

7) Si on écrit les torseurs sans leurs inconnues, on a :

$${}_A\{\tau_{0/1}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 8620 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$ et au point B $${}_B\{\tau_{0/2}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 3880 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$