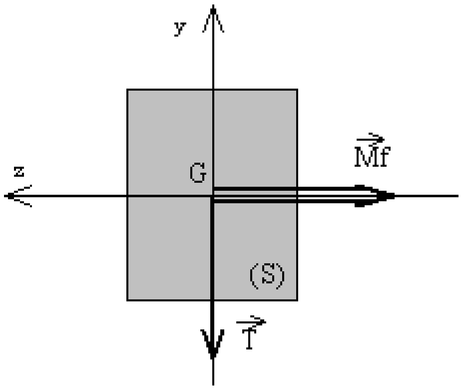
Flexion plane simple

Définition :

Une poutre est sollicitée en flexion plane simple lorsque le système des forces
extérieures se réduit à un système coplanaire et que toutes les forces sont
perpendiculaires à la fibre moyenne (voir ci-dessous).



Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

$$\{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Ty & 0 \\ 0 & Mfz \end{Bmatrix}_{G(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Remarque : si Ty est nul, alors la sollicitation est appelée flexion pure

Il existe plusieurs types de flexions (pure, plane, déviée).
Nous limiterons notre étude au cas de la flexion plane simple.

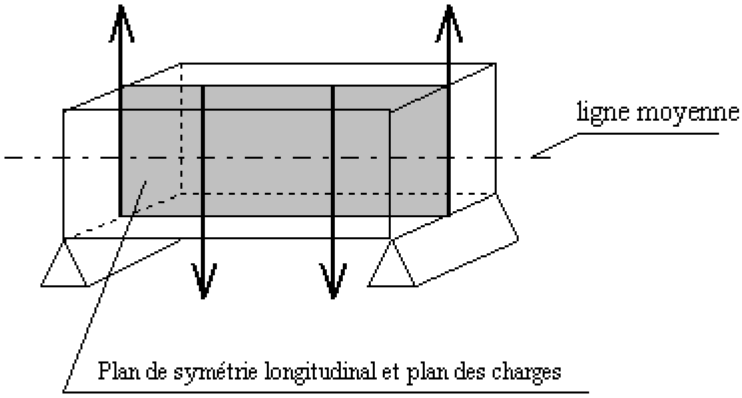
Hypothèses

En plus des hypothèses déjà énoncées au début du cours de RDM, la flexion plane simple nous amène à supposer que :

- la ligne moyenne de la poutre est rectiligne.
- la section droite de la poutre est rectiligne.
- la poutre admet un plan de symétrie longitudinal (voir fig.).

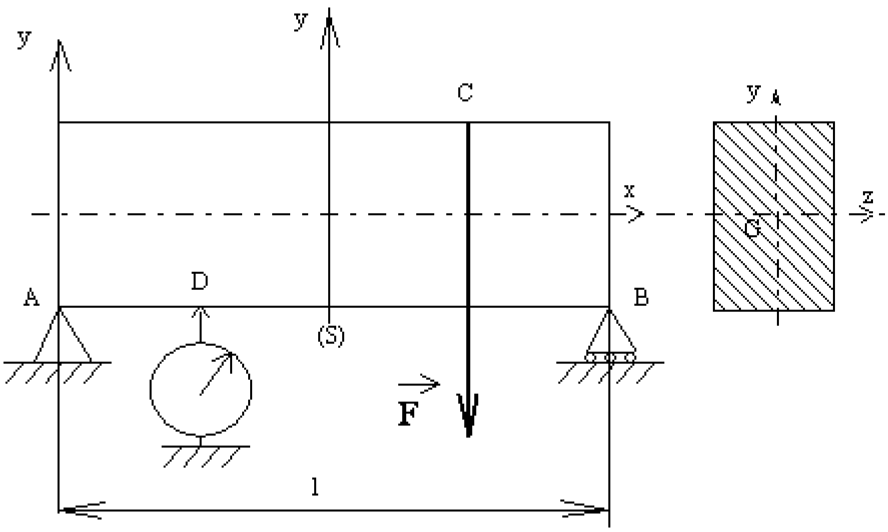
♦ toutes les forces appliquées à la poutre sont disposées perpendiculairement à la ligne moyenne et dans le plan de symétrie longitudinal (ou symétriquement par rapport à celui-ci).

♦ les forces appliquées sont soit concentrées en un point, soit réparties suivant une loi déterminée.



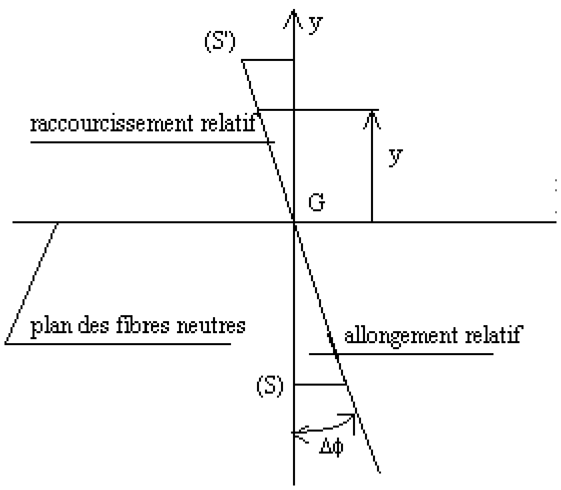
Essai de flexion (domaine élastique)

Un dispositif représenté ci-dessous permet d'effectuer un essai de flexion plane simple sur une poutre reposant sur deux appuis A et B et soumise en C à une force $\vec{F}$.



Un comparateur placé en D permet de mesurer la flèche lorsque F varie

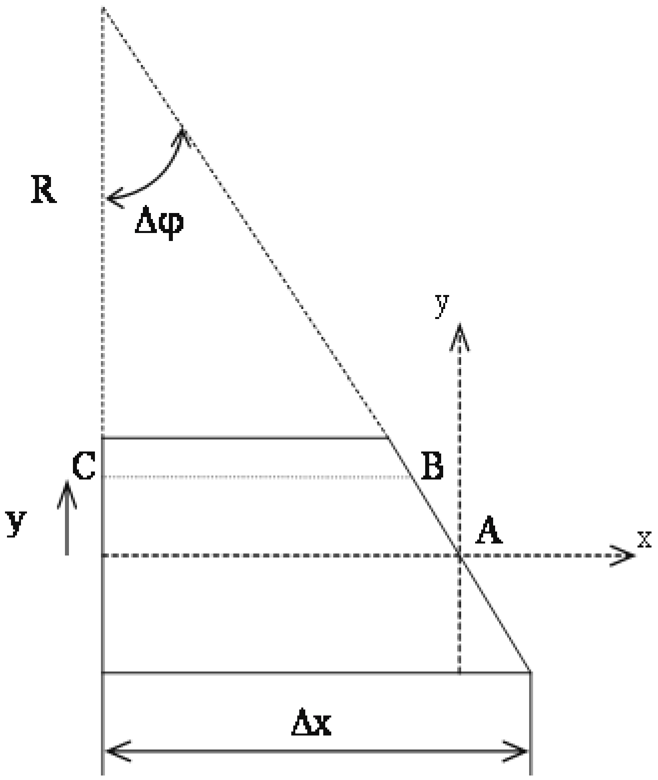
Constatations :



- La flèche est proportionnelle à l'effort F appliqué et ceci quelque soit le point D choisi.
- Pour une même valeur de F, la flèche est maximum lorsque D est au milieu de la poutre.
- On observe, en effectuant l'essai avec différentes poutres, que la flèche en D est inversement proportionnelle au moment quadratique I_{Gz} de la section.
- Les fibres longitudinales situées au dessus de la ligne moyenne se raccourcissent et celles situées en dessous de la ligne moyenne s'allongent.
- Les fibres appartenant au plan (G,x,z) ne changent pas de longueur.
- Les allongements et raccourcissement relatifs (Δl/l) sont proportionnels à la distance de la fibre considérée au plan (G,x,z).
- Les sections planes normales aux fibres restent planes et normales aux fibres après déformation

Relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant

Le moment fléchissant dépend de l'effort tranchant. Pour établir cette relation on isolera un tronçon de poutre (2) de longueur dx, soumis à des efforts tranchants Ty et des moments fléchissants Mfz.



Bilan des actions mécaniques extérieures à (2) :

- $$\{1 \rightarrow 2\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -Ty(x) & 0 \\ 0 & -Mfz(x) \end{Bmatrix}_G$$
- $$\{3 \rightarrow 2\}_{G'} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Ty(x+dx) & 0 \\ 0 & Mfz(x+dx) \end{Bmatrix}_{G'}$$

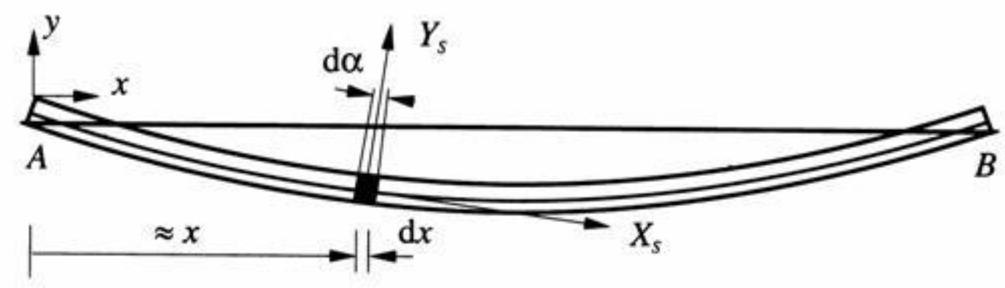
Le tronçon (2) étant en équilibre, on peut appliquer le P.F.S.
En prenant uniquement l'équation de moment au point G' projeté sur l'axe z, on obtient :

$$Mfz(x+dx) - Mfz(x) + Ty(x) \cdot dx = 0$$

$$Ty(x) = -\frac{Mfz(x+dx) - Mfz(x)}{dx}$$ soit encore $$Ty(x) = -\frac{dMfz(x)}{dx}$$

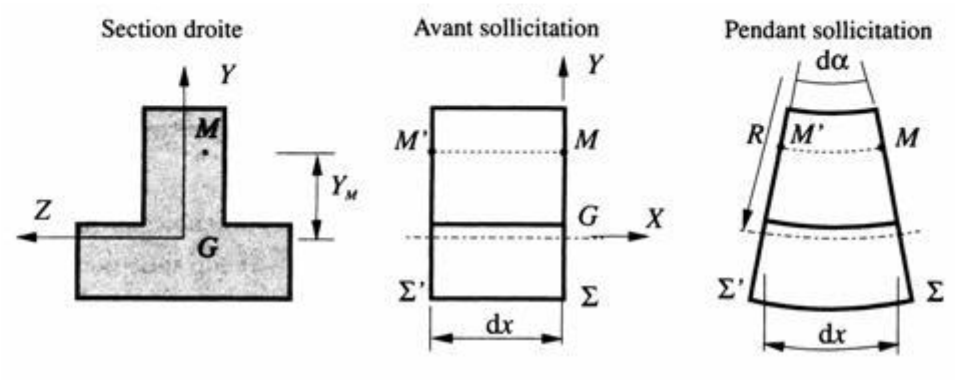
Etude des contraintes normales

La poutre étant sollicitée en flexion simple, la ligne caractéristique peut être assimilée à un arc de cercle de rayon R appelé rayon de courbure



Au cours de la déformation, le tronçon considéré initialement prismatique se transforme en portion de tore de rayon moyen R intercepté d'un angle $d\alpha$

R définit le rayon de courbure d'une fibre neutre.



MM' est une fibre du tronçon joignant deux points homologues des sections Σ et Σ'

Les fibres situées dans le plan $(G,\vec{x},\vec{z})$ ne varient pas et sont appelées fibres neutres

Les fibres au dessus de G (Y > 0) se raccourcissent et celles en dessous de G (Y < 0) s'allongent

Allongement / Raccourcissement relatif de la fibre M'M

Soient MM' une portion de fibre comprimée et NN' une portion de fibre tendue.

Soient : (Y_M, Z_M) coordonnées du point M dans le repère local $R=(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

(Y_N, Z_N) coordonnées du point N dans le repère local $R=(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

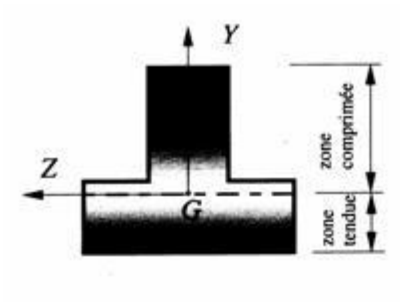
- longueur initiale M'M =NN'= dx
- après déformation, NN'> dx et M'M < dx

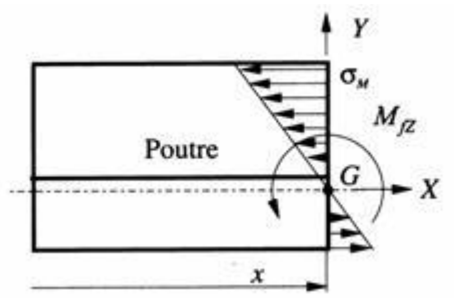
allongement relatif : $\varepsilon=\dfrac{NN'-dx}{dx}$ donc, $\varepsilon = Y_N\dfrac{d\alpha}{dx}$

raccourcissement relatif : $\varepsilon=\dfrac{MM'-dx}{dx}$ donc, $\varepsilon=-Y_M\dfrac{d\alpha}{dx}$

Expression de la contrainte normale

En exprimant la loi de Hooke définie par la relation $\sigma=\varepsilon E$, on obtient en un point quelconque N de la section :





-Dans la zone tendue :

$$\sigma = E.Y\frac{d\alpha}{dx}$$

-dans la zone comprimée :

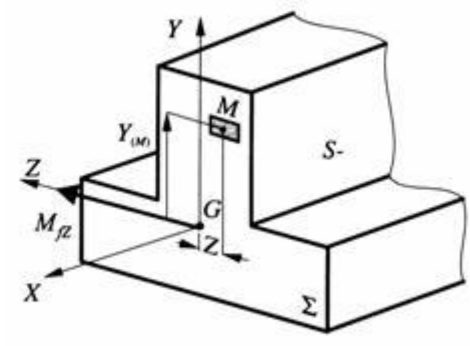
$$\sigma = -E.Y\frac{d\alpha}{dx}$$

Remarque :

- $R.d\alpha = dx \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{dx}$ $\frac{1}{R}$ est dit courbure en G d'une fibre neutre.
- la contrainte normale est nulle sur la fibre neutre
- le signe s'inverse à la traversée du plan $(G,\vec{x},\vec{z})$
- la répartition est linéaire sur la section droite
- le point le plus sollicité de la section est celui qui est le plus éloigné de la fibre neutre

Relation entre contrainte normale et moment fléchissant

Une coupure est effectuée au niveau de la section droite Σ



Soit un pont M de coordonnées (X_M,Y_M,Z_M) et $d\Sigma$ un élément de surface entourant M

L'effort élémentaire en un point est
$$dF = \sigma.d\Sigma$$

Le moment de cet effort au point G est
$M_G\left(d\vec{F}\right) = Y.\sigma.d\Sigma$ avec Y distance du point M à l'axe Gz

Le moment fléchissant Mfz est la somme des moments en G des actions mécaniques élémentaires transmises par les éléments de surface $d\Sigma$ constituant le section droite . soit $dMfz = Y.\sigma.d\Sigma$

$$Mfz = \int dMfz = \int Y.\sigma.d\Sigma = \int Y^2.E\frac{d\alpha}{dx}.d\Sigma = E\frac{d\alpha}{dx}\int Y^2.d\Sigma$$

Or $\int y^2.d\Sigma = I_{Gz}$ moment quadratique de Σ par rapport à ml'axe Gz

et $E\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\sigma}{Y}$

donc $Mfz = \frac{\sigma}{Y}I_{Gz}$ ou $\sigma = \frac{Mfz}{I_{Gz}}Y$

Dans une section droite,la contrainte normale est maxi au point le plus éloigné du point G(cdg de la section)

donc $\sigma_{\max} = \frac{Mfz}{I_{Gz}}Y_{\max}$

Module de flexion

On appelle module de flexion la quantité $\frac{I_{Gz}}{Y_{\max}}$ en mm^3. C'est une caractéristique courante des profilés.

Contrainte normale maximale

dans la section la plus sollicitée:

$$\sigma_{\max} = \frac{Mfz_{\max}}{I_{Gz}}Y_{\max}$$

si on pose $Y_{\max} = v$ alors:

$$\sigma_{max} = \frac{Mfz_{max}}{\left(\frac{I_{Gz}}{v}\right)}$$

σ_{max} = contrainte normale maximale (Mpa)

$\frac{I_{Gz}}{v}$ = module de flexion (mm^3)

Mfz_{max} = moment de flexion maxi sur $\vec{z}$ (N.mm)

Condition de résistance à la contrainte normale

$$kt.\sigma_{max} \le R_{pe} \quad \text{Avec} \quad R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

R_{pe} (ou σ_p): contrainte pratique admissible (Mpa)

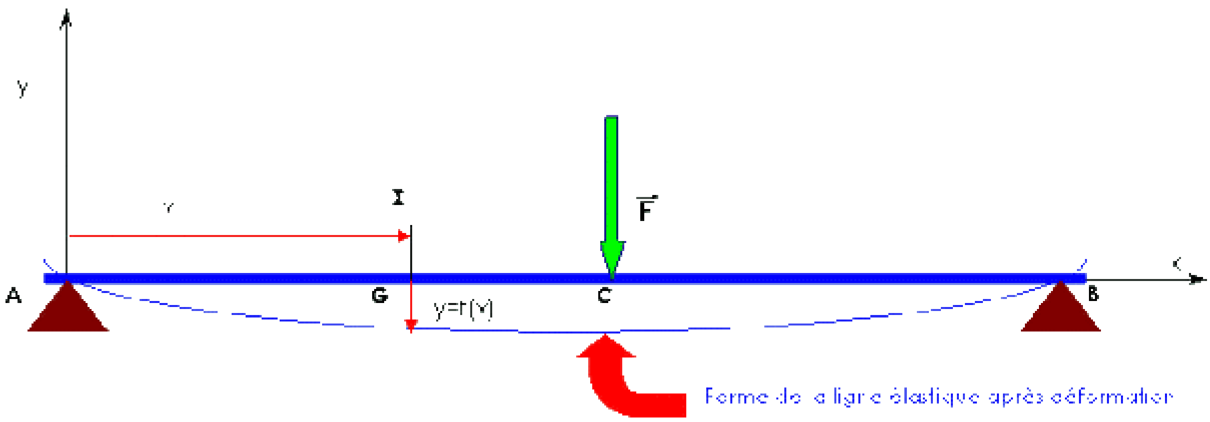
R_e (ou σ_e) : contrainte de limite élastique (Mpa)

s : coefficient de sécurité

σ_{max} = contrainte normale maximale (Mpa)

kt : coefficient de concentration de contrainte

Equation de la déformée



L’axe neutre Ax (ou ligne élastique) se déforme suivant une courbe telle que y=f(x).

Soit G un point de Ax. Le rayon de courbure en G est défini par :

$$R = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$ formule admise(voir maths).

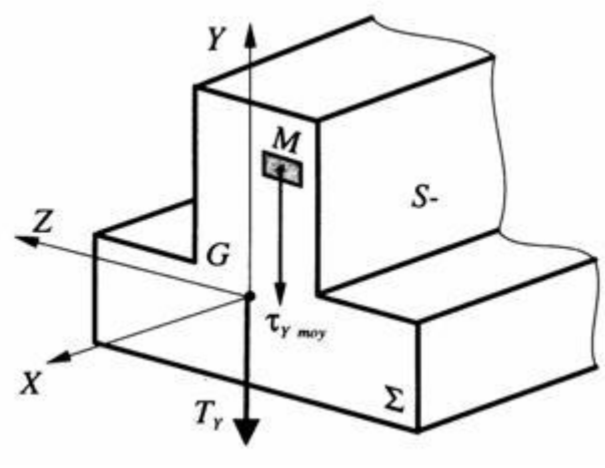
Les déformations étant yrès petites dans le domaine élastique, alors y'^2 est très faible devant 1 et par la suite , $1 + y'^2 \approx 1$.

D’où $R = \frac{1}{y''}$ or $\frac{1}{R} = \frac{\sigma}{EY} = \frac{Mfz}{I_{Gz}} Y . \frac{1}{EY} = \frac{Mfz}{EI_{Gz}}$

soit :

$$y'' = \frac{Mfz}{EI_{Gz}}$$

$$y = \int y' . dx = \int \left(\int y'' \right) . dx$$



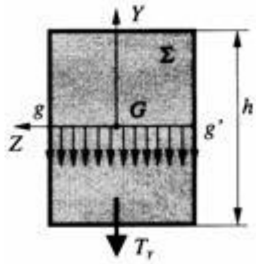
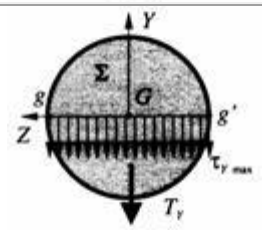
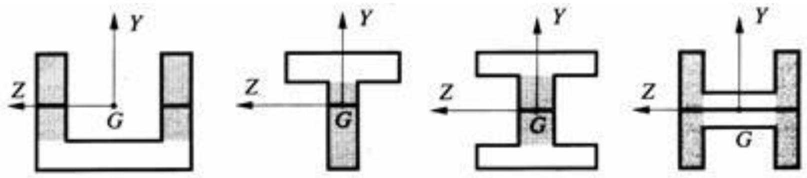
Contrainte tangentielle

Ty est l’effort tranchant (N)

S est la surface de la coupure Σ (mm²)

$$\tau_{Ymoy} = \frac{Ty}{S}$$ τ_{Ymoy} est la contrainte tangentielle (Mpa)

Contrainte tangentielle maximale

Section rectangulaire $\tau_{max} = \frac{3}{2}\tau_{moy}$	
Section circulaire $\tau_{max} = \frac{4}{3}\tau_{moy}$	
Autres sections $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{\tau_{moy}}{S_A}$	Si l'épaisseur est petite devant les autres dimensions tranversales, on peut considérer que seule la section S_A (partie grisée) travaille au cisaillement 

Condition de résistance à la contrainte tangentielle

$$\tau_{Y\max} \leq R_{pg}$$

R_{pg} : contrainte pratique de limite au glissement (Mpa) = $\frac{R_g}{s}$

R_g : contrainte de limite élastique au glissement (Mpa)

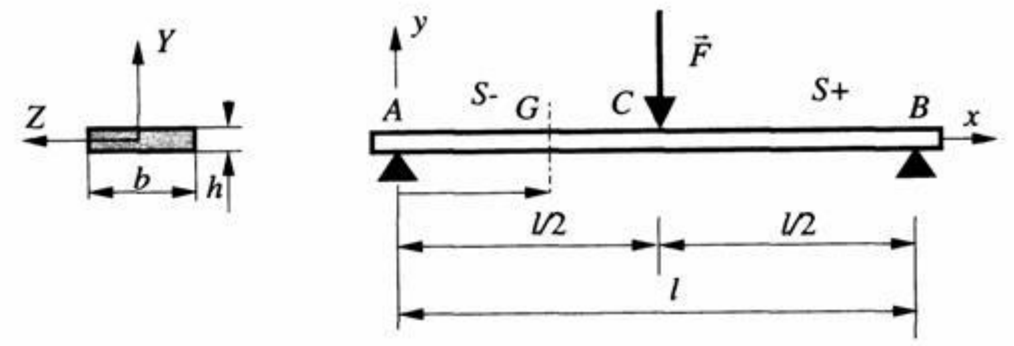
s : coefficient de sécurité

τ_{max} = contrainte tangentielle maximale (Mpa)

La contrainte limite au glissement R_g s'exprime en fonction de la contrainte limite à l'extension R_e

- matériaux ductiles : $R_g = 0.5\ R_e$
- matériaux peu ductiles : $R_g = 0.6\ R_e$ ou $R_g = 0.7\ R_e$
- matériaux à décohésion franche : $R_g = 0.9\ R_e$

Exemple d'application :



$F = 21$ N
$l = 600$ mm
$b = 20$ mm
$h = 4$ mm
Matière : A60
$E = 200\,000$ Mpa
$R_e = 340$ Mpa
$R_g = 0.6\ R_e$
$s=2$

Etude statique

On déduit $Y_{1\to S} = Y_{2\to S} = \frac{F_{3\to S}}{2} = 10{,}5$ N

donc $\vec{A}_{1\to S} = 10.5\,\vec{y}$ et $\vec{B}_{2\to S} = 10.5\,\vec{y}$

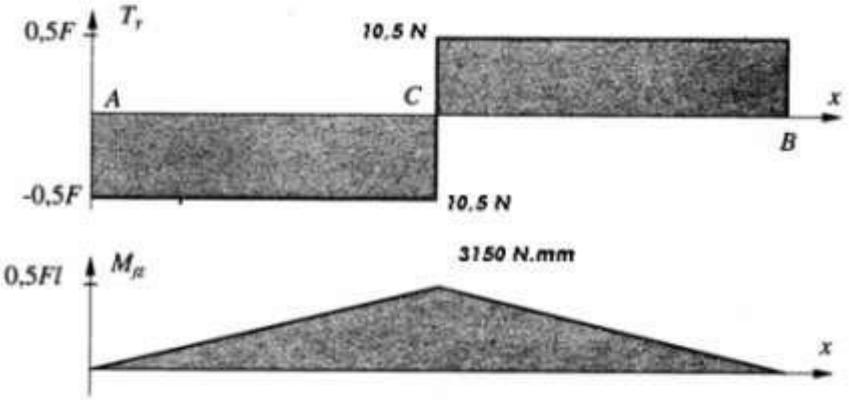
Torseur de cohésion pour $0 \le x \le \frac{l}{2}$

$$\{T_{coh}\} = \{S_+ \to S_-\} = -\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0.5F & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{A\,(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -0.5F & 0 \\ 0 & 0{,}5xF \end{matrix}\right\}_{G\,(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -10.5 & 0 \\ 0 & 10.5x \end{matrix}\right\}_{G\,(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Torseur de cohésion pour $\frac{l}{2} \le x \le l$

$$\{T_{coh}\} = \{S_- \to S_+\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0.5F & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{B\,(B,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0.5F & 0 \\ 0 & 0{,}5F(l-x) \end{matrix}\right\}_{G\,(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 10.5 & 0 \\ 0 & -10.5x+6300 \end{matrix}\right\}_{G\,(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Diagrammes



Contrainte normale maximale

$$\sigma_{max} = \frac{M_{fz}}{\frac{I_{Gz}}{Y_{max}}} = \frac{M_{fz}.Y_{max}}{I_{Gz}} = \frac{M_{fz}.\frac{h}{2}}{\frac{b.h^3}{12}} = \frac{3150.2}{\frac{20.4^3}{12}} = 59,0625\ MPa$$

Condition de résistance

$$\sigma_{max} \leq R_{pe} \rightarrow \sigma_{max} \leq \frac{R_e}{s} \rightarrow 59 \leq \frac{340}{2} \rightarrow 59 \leq 170$$

la condition est vérifiée avec un rapport $\frac{\sigma_{max}}{R_e} = 0.17$

Contrainte tangentielle maximale

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\tau_{moy} = \frac{3}{2}.\frac{0.5F}{b.h} = \frac{3}{2}.\frac{10.5}{20.4} = 0.19\ MPa$$

Condition de résistance

$$\tau_{Ymax} \leq R_{pg} \rightarrow \tau_{Ymax} \leq 0.6\frac{R_e}{s} \rightarrow 0.19 \leq 0.6\frac{340}{2} \rightarrow 0.19 \leq 102$$

la condition est vérifiée avec un rapport $\frac{\tau_{max}}{R_e} = 0.00059$

Conclusion

La poutre soumise à la flexion simple est plus sensible aux contraintes

Le calcul de résistance d'une poutre sollicitée en flexion simple se fait selon le critère de la contrainte normale

normales qu'aux contraintes tangentielles.

Calcul de la flèche maximale

$$f\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{P.l^3}{48.E.I_{Gz}}=\frac{21.600^3}{48.200000.\frac{20.4^3}{12}}=4.42mm$$

Calcul de la flèche sans l'aide du formulaire

$$y''(x)=\frac{M_{fz}}{E.I_{Gz}}=\frac{3150}{200000\frac{20.4^3}{12}}=0{,}000148$$

$y'(x)=0{,}000148.x+C_1$ y'(x)=0 pour x=l/2=300mm $C_1=-0{,}000148.300=-0{,}044297$

$$y'(x)=0{,}000148.x-0{,}044297$$

$$y(x)=0{,}000148.\frac{x^2}{2}-0{,}044297.x+C_2$$

y(x)=0 pour x=0 donc $C_2 = 0$

$$y(x)=0{,}000148.\frac{x^2}{2}-0{,}044297.x=0{,}000074.x^2-0{,}044297.x$$

La flèche sera maxi au point C (-6,64)