

# Dynamique des fluides

## DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

### DEFINITIONS

Le **débit** est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement.

#### Débit-massique

Si  $\Delta m$  est la masse de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps  $\Delta t$ , par définition le débit-massique est :

$$q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

unité :  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$

#### Débit-volumique

Si  $\Delta V$  est le volume de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps  $\Delta t$ , par définition le débit-volumique est :

$$q_v = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

unité :  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

#### Relation entre $q_m$ et $q_v$

La masse volumique est donnée par la relation :

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

$$\text{d'où : } q_m = \rho \cdot q_v$$

#### Remarques :

**Les liquides sont incompressibles** et peu dilatables (masse volumique constante) ; on parle alors d'**écoulements isovolumes**.

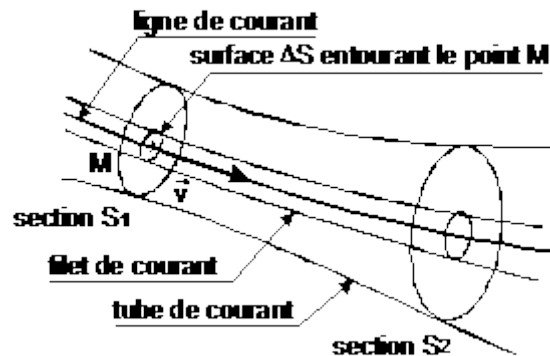
Pour les **gaz**, la masse volumique dépend de la température et de la pression. Pour des vitesses faibles (variation de pression limitée) et pour des températures constantes on retrouve le cas d'un écoulement isovolume.

## Écoulements permanents ou stationnaires

Un régime d'écoulement est dit **permanent** ou **stationnaire** si les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse, masse volumique, ...), ont une valeur constante au cours du temps.

### Équation de conservation de la masse ou équation de continuité

#### Définitions



**Ligne de courant** : En régime stationnaire, on appelle ligne de courant la courbe suivant laquelle se déplace un élément de fluide. Une ligne de courant est tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse du fluide en ce point.

**Tube de courant** : Ensemble de lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée.

**Filet de courant** : Tube de courant s'appuyant sur un petit élément de surface  $\Delta S$ .

La section de base  $\Delta S$  du tube ainsi définie est suffisamment petite pour que la vitesse du fluide soit la même en tous ses points (répartition uniforme).

#### Conservation du débit

Considérons un tube de courant entre deux sections  $S_1$  et  $S_2$ . Pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , infiniment petit, la masse  $\Delta m_1$  de fluide ayant traversé la section  $S_1$  est la même que la masse  $\Delta m_2$  ayant traversé la section  $S_2$ .

$$q_{m1} = q_{m2}$$

*En régime stationnaire, le débit-massique est le même à travers toutes les sections droites d'un même tube de courant.*

Dans le cas d'un **écoulement isovolume** ( $= \text{Cte}$ ) :

$$q_{v1} = q_{v2}$$

*En régime stationnaire, le débit-volumique est le même à travers toutes les sections droites d'un même tube de courant*

#### Expression du débit en fonction de la vitesse $v$

Le débit-volumique est aussi la quantité de liquide occupant un volume cylindrique de base  $S$  et de longueur égale à  $v$ , correspondant à la longueur du trajet effectué pendant l'unité de temps, par une particule de fluide traversant  $S$ .

Il en résulte la relation importante :  $q_v = v \cdot S$

### Vitesse moyenne

En général la vitesse  $v$  n'est pas constante sur la section  $S$  d'un tube de courant ; on dit qu'il existe un **profil de vitesse** (à cause des forces de frottement).



Dans une section droite  $S$  de la canalisation, on appelle **vitesse moyenne**  $v_m$  la vitesse telle que

$$v_{moy} = \frac{q_v}{S}$$

La vitesse moyenne  $v_{moy}$  apparaît comme la vitesse uniforme à travers la section  $S$  qui assurerait le même débit que la répartition réelle des vitesses.

Si l'écoulement est isovolume, cette vitesse moyenne est inversement proportionnelle à l'aire de la section droite.

$$q_v = v_{1moy} \cdot S_1 = v_{2moy} \cdot S_2 = Cte$$

C'est l'équation de continuité.

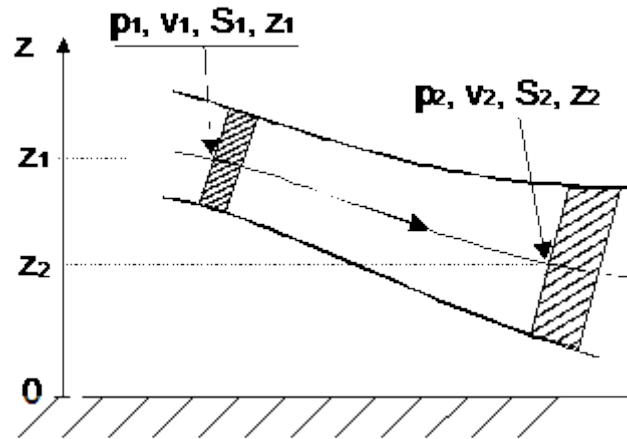
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

La vitesse moyenne est d'autant plus grande que la section est faible.

### Théorème de BERNOULLI

#### Théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible

Un *fluide parfait* est un fluide dont l'écoulement se fait *sans frottement*.



On considère un écoulement permanent isovolume d'un fluide parfait, entre les sections  $S_1$  et  $S_2$ , entre lesquelles il n'y a aucune machine hydraulique, (pas de pompe, ni de turbine).

Soit  $m$  la masse et  $V$  le volume du fluide qui passe à travers la section  $S_1$  entre les instants  $t$  et  $t+\Delta t$ . Pendant ce temps la même masse et le même volume de fluide passe à travers la section  $S_2$ . Tout se passe comme si ce fluide était passé de la position (1) à la position (2).

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à ce fluide entre les instants  $t$  et  $t+\Delta t$  (la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures : poids et forces pressantes), on obtient :

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + p = \text{Cte}$$

$p$  est la pression statique,

$\rho g z$  est la pression de pesanteur,

$\rho \frac{v^2}{2}$  est la pression cinétique.

Tous les termes s'expriment en pascal.

En divisant tous les termes de la relation précédente par le produit  $g$ , on écrit tous les termes dans la dimension d'une hauteur (pressions exprimées en mètres de colonne de fluide).

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = H = \text{Cte}$$

$H$  est la Hauteur totale,  $\frac{p}{\rho g}$  est la Hauteur de Pression,

$z$  est la cote,  $\frac{v^2}{2g}$  est la Hauteur cinétique,

$z + \frac{P}{\rho g}$  est la Hauteur piézométrique.

### Cas d'un écoulement (1)→(2) sans échange de travail

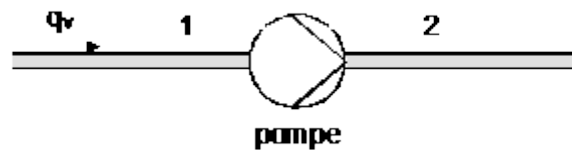
Lorsque, dans un écoulement d'un fluide parfait, il n'y a aucune machine (ni pompe ni turbine) entre les points (1) et (2) d'une même ligne de courant, la relation de Bernoulli peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = 0$$

ou

$$\frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2) + (z_2 - z_1) + \frac{(p_2 - p_1)}{\rho g} = 0$$

### Cas d'un écoulement (1)→(2) avec échange d'énergie



Lorsque le fluide traverse une machine hydraulique, il échange de l'énergie avec cette machine

sous forme de travail  $\Delta W$  pendant une durée  $\Delta t$ . La puissance  $P$  échangée est  $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

Unités :  $P$  en watt (W),  $W$  en joule (J),  $t$  en seconde (s).

- $P > 0$  si l'énergie est reçue par le fluide (ex. : pompe) ;
- $P < 0$  si l'énergie est fournie par le fluide (ex. : turbine).

Si le débit-volume est  $q_v$ , la relation de Bernoulli s'écrit alors :

$$\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = \frac{P}{q_v}$$

### VISCOSITE

• Dans un **fluide réel**, les forces de contact ne sont pas perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquelles elles s'exercent. La viscosité est due à ces **frottements** qui s'opposent au glissement des couches fluides les unes sur les autres.

• Les phénomènes dus à la **viscosité** des fluides ne se produisent que **lorsque ces fluides sont en mouvement**.

## Viscosité dynamique

Considérons deux couches de fluide contiguës distantes de  $\Delta z$ . La force de frottement  $F$  qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit  $\Delta v$ , à leur surface  $S$  et inversement proportionnelle à  $\Delta z$  :

$$F = \eta \cdot S \cdot \frac{\Delta v}{\Delta z}$$

Le facteur de proportionnalité **est le coefficient de viscosité dynamique** du fluide.

**Dimension** :  $[\eta] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$ .

**Unité** : Dans le système international (SI), l'unité de viscosité dynamique est le **Pascal seconde** (Pa·s) ou **Poiseuille** (PI) :

$$1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 1 \text{ PI} = 1 \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

## Viscosité cinématique

Dans de nombreuses formules apparaît le rapport de la viscosité dynamique et de la masse volumique .

Ce rapport est appelé **viscosité cinématique** :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

**Dimension** :  $[\nu] = L^2 \cdot T^{-1}$ .

**Unité** : Dans le système international (SI), l'unité de viscosité n'a pas de nom particulier : ( $m^2/s$ ).

Dans le système CGS (non légal), l'unité est le Stokes (St) :  $1 \text{ m}^2/\text{s} = 10^4 \text{ St}$

## PERTES DE CHARGE

- Un **fluide réel**, en **mouvement**, subit des **pertes d'énergie** dues aux frottements sur les parois de la canalisation (pertes de charge *systématiques*) ou sur les "accidents" de parcours (pertes de charge *singulières*).

## Les différents régimes d'écoulement : nombre de Reynolds

Les expériences réalisées par **Reynolds** (1883) lors de l'écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré, ont montré l'existence de deux régimes d'écoulement : **laminaire et turbulent**.



En utilisant des fluides divers (viscosité différente), en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un **nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds** et donné par :

$$\boxed{Re = \frac{\rho v D}{\eta}} \quad \text{ou} \quad Re = \frac{v D}{\nu}$$

avec :

= masse volumique du fluide,  $v$  = vitesse moyenne,  $D$  = diamètre de la conduite

= viscosité dynamique du fluide,  $\nu$  = viscosité cinématique  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$

L'expérience montre que :

si  $Re < 2000$  le régime est **LAMINAIRE**

si  $2000 < Re < 3000$  le régime est *intermédiaire*

si  $Re > 3000$  le régime est **TURBULENT**

Ces valeurs doivent être considérées comme des ordres de grandeur, le passage d'un type d'écoulement à un autre se faisant progressivement.

### **Théorème de Bernoulli appliqué à un fluide réel avec pertes de charge**

Lors d'un écoulement d'un fluide réel il peut y avoir des *pertes de charge* entre les points (1) et (2) : dans le cas d'une installation ne comportant pas de machine hydraulique (pompe ou turbine) on écrira la relation de Bernoulli sous la forme :

$$\boxed{\frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = -\Delta p}$$

- $\Delta p$  représente l'ensemble des pertes de charge entre (1) et (2) exprimées en Pa.

### **Expression des pertes de charge**

#### **Pertes de charge systématiques**

##### **Généralités**

Ce genre de perte est causé par le frottement intérieur qui se produit dans les liquides ; il se rencontre dans les tuyaux **lisses** aussi bien que dans les tuyaux **rugueux**.

Entre deux points séparés par une longueur  $L$ , dans un tuyau de diamètre  $D$  apparaît une perte de pression  $p$ . exprimée sous la forme suivante :

*Différence de pression (Pa) :*

$$\Delta p = \lambda \frac{\rho v^2 L}{2 D}$$

Perte de charge exprimée en mètres de colonne de fluide :

$$\Delta h = \lambda \frac{v^2 L}{2g D}$$

est un coefficient sans dimension appelé **coefficient de perte de charge linéaire**.

Le calcul des pertes de charge repose entièrement sur la détermination de ce coefficient .

#### Cas de l'écoulement laminaire : $Re < 2000$

Dans ce cas on peut montrer que le coefficient est uniquement fonction du nombre de Reynolds  $Re$  ; l'état de la surface n'intervient pas et donc ne dépend pas de  $k$  (hauteur moyenne des aspérités du tuyau), ni de la nature de la tuyauterie.

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad \text{avec} \quad Re = \frac{vD}{\nu}$$

Il est alors immédiat de voir que  $h$  est proportionnel à la vitesse  $v$  et donc au débit  $q$ , ainsi qu'à la viscosité cinématique .

#### Cas de l'écoulement turbulent : $Re > 3000$

On fait souvent appel à des formules empiriques plus simples valables pour des cas particuliers et dans un certain domaine du nombre de Reynolds, par exemple :

Formule de Blasius : (pour des tuyaux lisses et  $Re < 10^5$ )

$$\lambda = 0,316 Re^{-0,25}$$

#### Pertes de charge accidentelles

Ainsi que les expériences le montrent, dans beaucoup de cas, les pertes de charge sont à peu près proportionnelles au carré de la vitesse et donc on a adopté la forme suivante d'expression :

Différence de pression (Pa) :

$$\Delta p = K \frac{\rho v^2}{2}$$

Perte de charge exprimée en mètres de colonne de fluide :



$$\Delta h = K \frac{v^2}{2g}$$

**K** est appelé **coefficient de perte de charge singulière** (sans dimension).

La détermination de ce coefficient est principalement du domaine de l'expérience.

### **Théorème de Bernoulli généralisé**

Lors d'un écoulement d'un fluide réel entre les points (1) et (2) il peut y avoir des *échanges d'énergie* entre ce fluide et le milieu extérieur :

- par *travail* à travers une machine, pompe ou turbine ; la puissance échangée étant P
- par *pertes de charge* dues aux frottements du fluide sur les parois ou les accidents de parcours ; la différence de pression étant  $\Delta p$

Le théorème de Bernoulli s'écrit alors sous la forme générale :

$$\frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = \frac{\sum P}{q_v} - \Delta p$$

avec :

- $\sum P$  : somme des puissances échangées entre le fluide et le milieu extérieur, à travers une machine, entre (1) et (2) :

$P > 0$  si le fluide reçoit de l'énergie de la machine (pompe),

$P < 0$  si le fluide fournit de l'énergie à la machine (turbine),

$P = 0$  s'il n'y a pas de machine entre (1) et (2).

- $\Delta p$  : somme des pertes de charge entre (1) et (2) :