ثانوية موسى بن نصير نيابة الخميسات	فرض محروس رقم 02 الدورة الثانية : 2011/2010	2 باك علوم رياضية ذ : عبدالله بن لختير مدة الإنجاز : 04 ساعات

■ التمرين رقم 01: $(1,5pts)$

1)- حل المعادلة التفاضلية : $(E): y'' - 2y' + 5y = 0$.

2)- حدد الحل f للمعادلة (E) بحيث : $f(0) = 1$ و $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ، ثم أحسب $I = \int_0^{\pi} f(x)dx$.

■ التمرين رقم 02: $(02pts)$

لتكن f دالة عددية متصلة على $\mathbb{R}$ بحيث : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = -x + 2 + \int_0^{3x} f\left(\frac{1}{3}t\right)dt$.

1)- بين أن f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أنها حل للمعادلة التفاضلية : $(F): y' = 3y - 1$.

2)- حل المعادلة (F) ، ثم أحسب $f(0)$ و إستنتج تعبير $f(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

■ التمرين رقم 03: $(03pts)$

لكل $n \in \mathbb{N}$ ، نضع : $u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1 - x^2}\,dx$.

1)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$ ، ثم إستنتج نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2)- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} \times u_n$.

3)- لكل $x \in \mathbb{R}$ ، نضع : $F(x) = \int_0^{\cos x} \sqrt{1 - t^2}\,dt$.

أ- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب $F'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

ب- إستنتج تعبير الدالة F على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ، ثم حدد قيمة التكامل u_0 .

4)- أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{n+1}{n+4} \le \frac{u_{n+1}}{u_n} \le 1$ ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

ب- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n \times u_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$.

ج- بين أن : $\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n} \times u_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

■ التمرين رقم 04: $(06pts)$

⇦ الجزء الأول: $(2,5pts)$

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{1-xe^{-x}}$.

1)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R});1-xe^{-x}>0$ ، ثم إستنتج D_f .

2)- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم أعط تأويلهما الهندسي .

3)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=\dfrac{(1-x)e^{-x}}{\left(1-xe^{-x}\right)^2}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f .

4)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5)- بين أن : $(\forall x\in[0;+\infty[);1\le f(x)\le\dfrac{e}{e-1}$.

⇦ الجزء الثاني: $(3,5pts)$

لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بما يلي :

$\boxed{\mathrm{F}(x)=\int_0^{\ln x} tf(t)dt\ ;\ x\ge 1}$ و $\boxed{\mathrm{F}(x)=\int_0^{-\ln x} tf(t)dt\ ;\ 0<x<1}$.

1)- أ- بين أن : $(\forall x\in[1;+\infty[);\dfrac{(\ln x)^2}{2}\le \mathrm{F}(x)\le\dfrac{e(\ln x)^2}{2(e-1)}$.

ب- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{F}(x)}{x}$ ، ثم أعط تأويلهما الهندسي .

2)- بين أن : $(\forall x\in]0;1[);\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{F}(x)$.

3)- أ- حدد منحى تغيرات F على $[1;+\infty[$ و إستنتج منحى تغيراتها على $]0;1[$.

ب- أدرس قابلية إشتقاق الدالة F في $x_0=1$ ، ثم أعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها .

4)- ضع جدول تغيرات F على $\mathbb{R}^{*+}$ ، ثم أرسم المنحنى في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

■ **التمرين رقم 05:** $(7,5pts)$

⇦ **الجزء الأول:** $(3,5pts)$

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{1-e^{-2x}}{x};x>0 \text{ و } f(0)=2 .$$

1)- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم بين أن f متصلة على $\mathbb{R}^+$.

2)- بين أن لكل $t\in\mathbb{R}^+$: $1-2t\le e^{-2t}\le 1$ ، ثم إستنتج أن : $2t-2t^2\le 1-e^{-2t}\le 2t$.

✓ بين أن لكل $x\in\mathbb{R}^+$: $2x^2-\frac{4}{3}x^3\le e^{-2x}+2x-1\le 2x^2$.

✓ بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر و أن : $f'_d(0)=-2$.

3)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});f'(x)=\frac{\varphi(x)}{x^2}$ ، حيث $\varphi(x)=e^{-2x}(2x+1)-1$.

✓ أدرس إشارة الدالة φ على $\mathbb{R}^+$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

4)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

⇦ **الجزء الثاني:** $(04pts)$

لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $\mathrm{F}(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$.

1)- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\mathrm{F}'(x)=2f(2x)-f(x)$.

✓ تحقق أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});\mathrm{F}'(x)=f(x)\times e^{-2x}$ ، ثم إستنتج منحى تغيرات F على $\mathbb{R}^+$.

2)- بين أن : $(\forall t\in[1;+\infty[);0\le\frac{1}{t}-\mathrm{f}(t)\le e^{-2t}$.

✓ إستنتج أن : $(\forall x\in[1;+\infty[);0\le\ln 2-\mathrm{F}(x)\le\frac{1}{2}(e^{-2x}-e^{-4x})$.

✓ أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)$ ، ثم ضع جدول تغيرات F .

3)- أرسم المنحنى (C_{F}) في معلم متعامد و ممنظم .

4)- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $S_n=f(n)+f(n+1)+...+f(2n)$.

✓ تحقق أن : $(\forall k\in\{0;1;...;n-1\});f(k+1+n)\le\int_{k+n}^{k+1+n} f(x)dx\le f(k+n)$.

✓ إستنتج أن لكل $n\in\mathbb{N}^*$: $\mathrm{F}(n)+f(2n)\le S_n\le\mathrm{F}(n)+f(n)$.

✓ بين أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها .

■ التمرين الإضافي:

1)- أحسب التكامل : $I=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{8}}\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx$.

2)- أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);u_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\times\sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

3)- ليكن $a\in\left]1;+\infty\right[$.

⇦ بين أن المعادلة : $(\mathrm{E}):\int_a^x\frac{1}{\ln t}dt=1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]1;+\infty\right[$.

4)- لتكن f دالة عددية متصلة على $\mathbb{R}$ ، و لكل $x\in\mathbb{R}$ نضع : $G(x)=f(x)\times\int_0^x f(t)dt$.

⇦ بين أنه إذا كانت الدالة G تناقصية على $\mathbb{R}$، فإن f تكون منعدمة على $\mathbb{R}$.

5)- لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $h(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

⇦ أحسب نهاية المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);v_n=\left(\sum_{k=1}^{n}h\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)\right)-n$.

إنتهى الموضوع .

تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .