الدرس الثاني

القوى

ملخص الدرس

لدينا

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ مرة}}$$

$$x^4 = x \times x \times x \times x$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0.0001$$

$$x^m \times x^p = x^{m+p} \quad ; (x \times y)^m = x^m \times y^m$$

$$(x^m)^p = x^{mp}$$

$$\frac{x^m}{x^p} = x^{m-p}$$

$$(-x)^{2n} = x^{2n}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^m$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

التماريـــــــــــــــــــــــــــن :

التمرين الأول :

بسط مايلي :

$$A = \left(\left(\frac{-3}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{-2}$$

$$B = 0.064 \times 0.0002 \times 10^2 \times \frac{1}{0.008}$$

$$C = 1.02 \times 10^{-11} \times \frac{1}{0.051} \times 10^4$$

التمرين الثاني :

أحسب مايلي :

$$D = \left[\left(\frac{15}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \times \left(\frac{15}{4}\right)^3\right]$$

التمرين الثالث :

ليكن x و yبحيث:

$$x = -12.4 \times 10^{-20}$$

$$y = 2.5 \times 10^{-16}$$

أكتب التعابير التالية على شكل كتابة علمية :

$x \times y$ و $x + y$ و $x - y$

التمرين الرابع :

ليكن x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا بحيث:

$$x^{4010} \times y^{4010} = (x^2 + y^2)\,(xy)^{2004}$$

1- بين أن :

$$(1) \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{2005} + \left(\frac{y}{x}\right)^{2005} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

2- استنتج أن :

$$2^{-2005} + 2^{2005} = \frac{3}{2}$$

التمرين الخامس :

1- بين أن :

$$3333^2 + 4444^2 = 5555^2$$

2- بين أن :

$$(999999)^2 + (2000)^2 = (1000001)^2$$

التمرين السادس :

أحسب و بسط :

1- $a \neq b$

$$A = \frac{a^n \times b - a^{n+1}}{b^n \times a - b^{n+1}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$$

2-

$$B = \left(\frac{3^2(3^{-2} - 2^{-3})}{2^{-2}}\right)^{-2}$$

3-

$$C = \frac{3(a^{-2})^3.(ab^2)^{-3}.(ab)^{-1}}{(a^3b^5)^{-2}\ .\ a^3b^{-4}}$$

التمرين السابع :

Dعدد حقيقي بحيث:

$$D^8 = \frac{256}{6561} \quad \text{و} \quad D^5 = \frac{32}{243}$$

أحسب D

التمرين الثامن :

1- بين أنه مهما تكن n من IN:

$$(1) \quad 2^{n+2} = 7 \times 2^{n+1} - 10 \times 2^n$$

2- استنتج أن :

$$2^{n+2} = 39 \times 2^{n-1}$$

هـــــــــــــام جـــــــــــــــــــــــــدا

من أجل ترسيخ الأفكار و تثبيت المعلومات في الذاكرة، فتنتقل ذاكرتك من ذاكرة قصيرة المدى إلى ذاكرة بعيدة المدى عليك أن تسير على النحو التالي :

1- قم بتجميع عدد الخاصيات و التعاريف و المعلومات و اقرأها جيدا حتى تترسخ عندك.

2- بعد 25 دقيقة قم بمراجعة جميع المعلومات التي قرأتها في الأول

3- قم بمراجعة المعلومات المحصلة بعد 24 ساعة

4- قم بمراجعتها 5 مرات موزعة على 3 أيام

هذه التقنية للتذكر و التعليم تلقن الآن في أكبر الجامعات الأمريكية و الأربية و قد أعطت نتائج باهرة مع الأغلبية الساحقة لطلاب و في مختلف أسلاك التعليم.

حـــــــــــــــــــــــــل تماريــــــــــــن القـــــــوى

حل التمرين الأول:

$$A = \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{-2}$$

$$= \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{1} - \frac{2^2}{3^2}\right]^{-2}$$

$$= \left(-\frac{2}{3} - \frac{4}{9}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{-6-4}{9}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{-10}{9}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{-9}{10}\right)^{2}$$

$$= \left(\frac{9}{10}\right)^{2}$$

$$= \frac{99}{100}$$

تذكير من أجل حلB

$0,3 \quad = \quad 3.10^{-3} = \frac{3}{10}$

$0,81 \quad = \quad 81.10^{-2} = \frac{81}{100}$

رقمين بعد الفاصلة

$0,0037 \quad = \quad 37.10^{-4} = \frac{37}{10000}$

4 أرقام بعد الفاصلة

$10^{m} \times 10^{n} = 10^{m+n}$

$\frac{1}{10^{-n}} = 10^{n}$ <= **تغير الإشارة**

$$B = 0,064 \times 0,0002 \times 10^{2} \times \frac{1}{0,008}$$

$$= 64 \times 10^{-3} \times 2.10^{-4} \times 10^{2} \times \frac{1}{8.10^{-3}}$$

$$= 64 \times 2 \times 10^{-3} \times 10^{-4} \times 10^{2} \times \frac{1}{8} \times 10^{3}$$

$$= 16 \times 10^{-2}$$

$$= \frac{16}{10^{2}}$$

$$= \frac{16}{100}$$

$$= 0,16$$

$$C = 1,02 \times 10^{-11} \times \frac{1}{0,051} \times 10^{4}$$

$$= 1,02 \times 10^{-11} \times \frac{1}{51.10^{-3}} \times 10^{4}$$

$$= 1,02 \times \frac{1}{51} \times 10^{-11} \times 10^{3} \times 10^{4}$$

$$= \frac{1,02}{51} \times 10^{(-11 + 3+4)}$$

$$= 0,02 \times 10^{-4}$$

$$= 2 \times 10^{-2} \times 10^{-4}$$

$$= 2 \times 10^{-6}$$

<u>حل التمرين الثاني :</u>

$$D = [(\frac{15}{3})^{2} \times (\frac{3}{4})^{-2} \times (\frac{15}{4})^{3}]$$

$$= \frac{(15)^{2}}{3^{2}} \times (\frac{4}{3})^{2} \times \frac{15^{3}}{4^{3}}$$

$$= \frac{(15)^{2} \times (15)^{3} \times 4^{2}}{3^{2} \times 3 \times 4^{3}}$$

$$= \frac{15^5}{3^3}$$

$$= \frac{(3 \times 5)^5}{3^3}$$

تذكير $[\, a^n ; a^m = a^{n-m} \,]$

$$= \frac{3^5 \times 5^5}{3^3}$$

$$D = 3^2 . 5^5$$

حل التمرين الثالث :

$$x \times y = -12{,}4 \times 10^{-20} \times 2{,}5 \times 10^{-16}$$

$$= -12{,}4 \times 2{,}5 \times 10^{-20} \times 10^{-16}$$

$$= -31 \times 10^{[-20+(-16)]}$$

$$= -31 \times 10^{-36}$$

يجب كتابة $x + y$ على شكل $x + y = a \times 10^{n}$

إذن الهدف هو الوصول إلى أساس موجب بين 10^{-16} و 10^{-20}

إذن نبحث عن حل على شكل $x + y = a \times 10^{18}$

$$x + y = -12{,}4 \times 10^{-20} + 2{,}5 \times 10^{-16}$$

$$-12{,}4 \times 10^{-20} = -12{,}4 \times 10^{-2} \times 10^{-18}$$

$$= -0{,}124 \times 10^{-18}$$

$$2{,}5 \times 10^{-16} = 2{,}5 \times 10^{2} \times 10^{-18}$$

$$= 250 \times 10^{-18}$$

نعوض إذن :

$$x + y = -0{,}124 \times 10^{-18} + 250 \times 10^{-18}$$

نعمل ب 10^{-18}

$$x + y = 10^{-18}(-0{,}124 + 250)$$

$$= 249{,}876 . 10^{-18}$$

$$x - y = -0{,}124 . 10^{-18} - 250 . 10^{-18}$$

$$= 10^{-18}(-0{,}124 - 250)$$

$$= -250{,}124 . 10^{-18}$$

حل التمرين الرابع :

لدينا

$$x^{4010} = (x^2)^{2005}$$

$$x^{4010} + y^{4010} = (x^2 + y^2)\,(xy)^{2005}$$

$$\frac{x^{4010} + y^{4010}}{(xy)^{2005}} = \frac{x^2 + y^2}{(xy)}(xy)^{2005}$$

$$\frac{x^{4010}}{(xy)^{2005}} + \frac{y^{4010}}{(xy)^{2005}} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

$$\frac{(x^2)^{2005}}{(xy)^{2005}} + \frac{(y^2)^{2005}}{(xy)^{2005}} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy}$$

$$\left(\frac{x^2}{xy}\right)^{2005} + \left(\frac{y^2}{xy}\right)^{2005} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{2005} + \left(\frac{y}{x}\right)^{2005} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

-2 لاحظ أن $\frac{y}{x} = 2$

إذن نأخذ $x = 1$ و $y = 2$ ثم نعوض في العلاقة(1) <=

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2005} + \left(\frac{2}{1}\right)^{2005} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1}$$

إذن $2^{-2005} + 2^{2005} = \frac{3}{2}$

<u>حل التمرين الخامس:</u>

1- نبين أن $3333^2 + 4444^2 = 5555^2$

إذن يكفي أن نبين أن $5555^2 - 3333^2 = 4444^2$

و ذلك بغية تطبيق المتطابقة الهامة

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$5555^2 - 3333^2 = (5555 - 3333)(5555 + 3333)$$
$$= 2222 \times 8888$$
$$= 2222 \times (2 \times 4444)$$
$$= (2222 \times 2) \times 4444$$
$$= 4444 \times 4444$$
$$= 4444^2$$

2- بنفس الطريقة نبين أن $(999999)^2 + (2000)^2 = (1000001)^2$

$$(1000001)^2 - (999999)^2 = (1000001 - 999999)(1000001 + 999999)$$
$$= 2 \times 2000000$$

لاحظ أن $3\underbrace{0\ldots\ldots0}_{n \text{ مرة}} = 3 \times 10^n$

$$= 2 \times 2 \times 10^6$$
$$= 2 \times 10^6$$
$$= 2^2 \times (10^3)^2$$
$$= (2 \times 10^3)^2$$
$$= (2000)^2$$

حل التمرين السادس:

$$A = \frac{a^n \times b - a^{n+1}}{b^n \times a - b^{n+1}} \times \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$$

$$= \frac{a^n \times b - a^{n+1}}{b^n \times a - b^{n+1}} \times \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

$$= \frac{(a^n \times b - a^{n+1}) \times b^n}{(b^n \times a - b^{n+1}) \times a^n}$$

$$= \frac{a^n\ b^{n+1} - a^{n+1}\ b^n}{a^{n+1} b^n - a^n\ b^{n+1}}$$

$$= -1$$

$$B = \left(\frac{3^2(3^{-2} - 2^{-3})}{2^{-2}}\right)^{-2}$$

نذكر بأن $[\, a^{-n} = \frac{1}{a^n}]$

$$= \left(\frac{3^2\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^3}\right)}{\frac{1}{2^2}}\right)^{-2} \qquad = \left(\frac{9\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{8}\right)}{\frac{1}{4}}\right)^{-2}$$

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{72}$$

$$= \left(9\left(-\frac{1}{72}\right) \times \frac{4}{1}\right)^{-2}$$

$$= \left(-\frac{36}{72}\right)^{-2}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$= \left(-\frac{2}{1}\right)^{2}$$

$$B = 4$$

$$C = \frac{3(a^{-2})^3 \times (ab^2)^3 \times (ab)^{-1}}{(a^3b^5)^{-2} \times a^3b^{-4}} \qquad [\, x^m \times x^n = x^{m+n}\ ;\ (x^m)^n = x^{mn} \,]$$

$$= \frac{3\left(\frac{1}{a^2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{ab^2}\right)^3 \times \frac{1}{ab}}{\frac{1}{(a^3b^5)^2} \times a^3\ \frac{1}{b^4}} \qquad = \frac{\frac{3}{a^6} \times \frac{1}{a^3b^6} \times \frac{1}{ab}}{\frac{1}{a^6b^{10}} \times \frac{a^3}{b^4}}$$

$$= \frac{\frac{3}{a^6 \times a^3 \times a \times b^6 \times b}}{\frac{a^3}{a^6 \times b^{10} \times b^4}}$$

$$= \frac{3}{a^{10} \times b^{7}} \times \frac{a^{6}b^{14}}{a^{3}}$$

$$[\frac{x^{m}}{x^{n}} = x^{m-n} \ ; \ x^{-n} = 1;x^{n}]$$

$$= \frac{3\ a^{6} \times b^{14}}{a^{13} \times b^{7}}$$

$$= 3(\frac{a^{6}}{a^{13}}) \times (\frac{b^{14}}{b^{7}})$$

$$= 3\ a^{6-13} \times \ b^{14-7}$$

$$= 3\ a^{-7} \times b^{7} \qquad = 3\ \frac{1}{a^{7}}\ .\ b^{7}$$

$$C \quad = \quad 3(\frac{b}{a})^{7}$$

<u>حل التمرين السابع:</u>

$D^{5} = \frac{32}{243}$ **[لاحظ أن $32 = 2^{5}$ و $256 = 2^{8}$]**

إذن $D^{5} = \frac{2^{5}}{243}$

الفكرة هي البحث عن أصغر أس للعدد D

$$D^{8} = \frac{2^{8}}{6561}$$

لدينا $D^{3} = \frac{D^{8}}{D^{5}}$

$$D^{3} = \frac{D^{8}}{D^{5}} = \frac{\frac{2^{8}}{6561}}{\frac{2^{5}}{243}}$$

$$= \frac{2^{8}}{6561} \times \frac{243}{2^{5}}$$

$= \frac{2^{8}}{2^{5}} \times \frac{243}{6561}$ **[لدينا $\frac{6561}{243} = 27$]**

بعد الإختزال

$$= 2^{3} \times \frac{1}{27} = \frac{2^{3}}{27}$$

$= \frac{2^{3}}{3^{3}} = (\frac{2}{3})^{3}$ **[لاحظ أن $3^{3} = 27$]**

إذن $D^{3} = (\frac{2}{3})^{3}$

يعني $D = \frac{2}{3}$

حل التمرين الثامن

1- بين أن $2^{n+2} = 7 \times 2^{n+1} - 10 \times 2^n$

$$7 \times 2^{n+1} - 10 \times 2^n = \frac{7}{2} \times 2 \times 2^{n+1} - \frac{10}{2\times 2} 2 \times 2 \times 2^n$$

قمنا بذلك لرفع أس 2 إلى n+2 <=

$$7 \times 2^{n+1} - 10 \times 2^n = \frac{7}{2} \times 2^{n+2} - \frac{10}{4} \times 2^{n+2}$$

$$= (\frac{7}{2} - \frac{10}{4}) \times 2^{n+2} \quad = (\frac{7}{2} - \frac{5}{2}) \times 2^{n+2}$$

$$= \frac{7-5}{2} \times 2^{n+2}$$

$$= 2^{n+2}$$

$$7 \times 2^{n+1} - 10 \times 2^n = 2^{n+2}$$

2- نطبق العلاقة إلى الحد n+1 نجد :

$$2^{n+1} = 7 \times 2^n - 10 \times 2^{n-1}$$

لدينا $2^{n+1} = 7\times 2^{n+1} - 10 \times 2^n$

$$= 7(7 \times 2^n - 10 \times 2^{n-1}) - 10 \times 2^n$$

$$= 49 \times 2^n - 70 \times 2^{n-1} - 10 \times 2^n$$

$$= 39 \times 2^n - 70 \times 2^{n-1}$$

إذن $2^{n+1} = 39 \times 2^n - 70 \times 2^{n-1}$