

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -3 \\ 5 + 2x = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 - y^2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+3}{y+5} = 3 \\ \frac{x+1}{y-3} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

التمرين الثاني :

1- حل النظام التالية

$$\begin{cases} 3x + y = 115 \\ 2x - 3y = -70 \end{cases}$$

2- استنتج حلول النظام

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 115 \\ 2x^2 - 3y^2 = -70 \end{cases}$$

الدرس السابع

نظمة معادلتين

ملخص _____ ص _____ درس

- إذا كانت النظمة تؤول إلى حل وحيد (x_0, y_0) فإن $S = \{x_0, y_0\}$
- إذا كانت النظمة تؤول إلى نفس المعادلة $ax + by + c = 0$ فإن مجموعة الحلول هي هذا المستقيم
- إذا كانت النظمة تؤول عند حلها إلى شيء مستحيل (مثل $0x + 0y = 1$) فإنه ليس للنظمة حل

التمارين _____ ن :

التمرين الأول :

حل النظمات التالية

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 0,5x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - 2y = -5 \end{cases}$$

التمرين الثالث :

لتكن النظام S مع a و b عدنان حقيقيان

$$S \begin{cases} m x + y = 1 \\ x + m y = 1 \end{cases}$$

1- حدد حلول النظام (S) حسب قيم البارامتر m

2- استنتج حلول النظام

$$\begin{cases} m(x+y) + (x+y) = 1 \\ x+y + m(x+y) = 1 \end{cases}$$

التمرين الرابع :

ليكن n و p عددين صحيحين طبيعيين بحيث :

$$4^n + 65 = p^2$$

1- نضع $x = 2^n$ و $y = p$

بين

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 65 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} y - x = 5 \\ y + x = 13 \end{cases}$$

2- استنتج قيم n و p

التمرين الخامس :

1- بين أن $x^2 - 6x + 7 = (x - 3)^2$

2- حل المعادلة $x^2 - 6x + 7 = 0$

3- استنتج حلول النظام

$$\begin{cases} A + B = 6 \\ A^2 + B^2 = 22 \end{cases}$$

التمرين السادس :

نعتبر المعادلة (E) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{3} - 1$

بحيث $x \geq 0$

نضع $V = \sqrt{x-1}$ و $U = \sqrt{x+1}$

1- بين أنه إذا كان x حل للمعادلة (E) فإن الزوج (U, V) حلا للنظام (S)

حل التمرين الأول:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 & (1) \\ 0,5x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (2) في -2 نحصل على

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -x - 2y = -2 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نحصل على

و بالتالي جميع القيم التي يمكن أن تأخذها x و y هي حلول للمعادلة
و بذلك هناك مالا نهاية له من الحلول

$$\begin{cases} x - y = -1 & (1) \\ 2x - 2y = -5 & (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) في -2 نحصل على

$$\begin{cases} -2x + 2y = +2 \\ 2x - 2y = -5 \end{cases}$$

نجمع المعادلتين

$$0x + 0y = -3$$

$$(S) : \begin{cases} U + V = \sqrt{3} + 1 \\ U - V = \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

2- حل النظام (S)

3- استنتج حلول المعادلة (E)

1- حل النظام التالية

$$\begin{cases} x + y = 43 \\ 2x + 5y = 164 \end{cases}$$

2- يتوفر شخص على 1640 د مكونة من 43 ورقة نقدية، إحداها مكونة من 20 د و

الأخرى من فئة 50 درهم

حدد عدد الأوراق من كل فئة

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 3(x - y) = -3$$

لدينا

$$\begin{cases} x - y = -1 & (1) \\ x + y = 3 & (2) \end{cases}$$

إذن

و

لدينا $x = -1 + y$ نعوضها في المعادلة (2)

$$-1 + y + y = 3 \implies 2y = 4 \implies y = 2$$

$$x = -1 + 2 \quad \text{إذن}$$

$$S = (1, 2)$$

⇒

$$\begin{cases} \frac{x+3}{y+5} = 3 \\ \frac{x+1}{y-3} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

إذن

$$\begin{cases} x + 3 = 3(y + 5) = 3y + 15 \\ 2(x + 1) = 1(y - 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 - 3y - 15 = 0 \\ 2x + 2 - y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$0 \neq -3$$

و هذا غير ممكن لأن

و بالتالي لا يوجد هناك حل $S = \emptyset$

⇒

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -3 & (1) \\ 5 + 2x = 3y & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3y & (1) \\ 5 + 2x = 3y & (2) \end{cases}$$

بتعويض قيمة x في المعادلة (2) نحصل على :

$$5 + 2(-3y) = 3y$$

$$9y = 5$$

$$y = \frac{5}{9}$$

يعني

$$x = -3 \times \frac{5}{9} = \frac{-5}{3}$$

إذن

النظمة لها حل وحيد و هو الزوج

$$S = \left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{9}\right)$$

⇒

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 - y^2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 2y = 230 \\ -6x + 9y = 210 \end{cases} \quad \text{نحصل}$$

$$11y = 440 \quad \text{المجموع يعطي}$$

$$y = \frac{440}{11} = 40$$

إذن نعوض قيمة y في المعادلة (1)

$$3x = 115 - y = 75$$

$$x = \frac{75}{3} = 25$$

$$S = (25, 40)$$

إذن

2- حلول النظام

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 115 \\ 2x^2 - 3y^2 = -70 \end{cases}$$

لاحظ أن للنظمتين نفس المعاملات في المعادلتين

لذلك نضع $X = x^2$ و $Y = y^2$ نحصل على النظام الجديدة

$$(E) \begin{cases} 3X + Y = 115 \\ 2X - 3Y = -70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 12 & (1) \\ 2x - y = -5 & (2) \end{cases}$$

حسب (1) لدينا $x = 3y + 12$ إذن بتعويضها في (2)

$$2(3y + 12) - y = -5$$

$$6y - y + 24 = -5$$

$$5y = -29$$

$$y = \frac{-29}{5}$$

$$x = 3\left(\frac{-29}{5}\right) + 12 = \frac{-87}{5} + 12$$

إذن

$$x = \frac{-27}{5}$$

$$S = \left(\frac{-27}{5}, \frac{-29}{5}\right)$$

إذن

حل التمرين الثاني

-1

$$(E) \begin{cases} 3x + y = 115 & (1) \\ 2x - 3y = -70 & (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) في 2 و المعادلة (2) -3

$$x = 1 - m \left(\frac{1}{1+m} \right)$$

$$= \frac{1+m-m}{1+m}$$

$$= \frac{1}{1+m}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{1+m}, \frac{1}{1+m} \right), m \in \mathbb{IN} \right\}$$

إذن مجموعة الحلول هي

⇒ إذا كان $1 - m^2 = 0$ و منه $m^2 = 1$ إذن $m = -1$ أو $m = 1$

أ - إذا كان $m = 1$ فإن النظمة تصبح :

$$\begin{cases} -x + y = 1 & (3) \\ x - y = 1 & (4) \end{cases}$$

(3) + (4) تعطي $0 = 2$ وهذا غير ممكن إذن $S = \emptyset$

ب - إذا كان $m = -1$ فإن النظمة تصبح

$$\begin{cases} x + y = 1 & (5) \\ x + y = 1 & (6) \end{cases}$$

(5) - (6) تعطي $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ وبالتالي يوجد ما لانهاية له من الحلول

$$S = \{ (x, y); x + y = 1 \}$$

أي المستقيم الذي معادلة $x + y = 1$

حسب السؤال (1) لدينا $X = 25$ و $Y = 40$

لأن $(25, 40)$ هو حل النظمة

وبالتالي $x^2 = X = 25$ و $y^2 = Y = 40$

إذن $x = 5$ أو $x = -5$ و $y = 2\sqrt{5}$ أو $y = -2\sqrt{5}$

وبالتالي مجموعة الحلول هي :

$$S = \{ (-5, 2\sqrt{5}); (-5, -2\sqrt{5}); (5, 2\sqrt{5}); (5, -2\sqrt{5}) \}$$

حل التمرين الثالث:

$$\begin{cases} mx + y = 1 & (1) \\ x + my = 1 & (2) \end{cases}$$

$m \in \mathbb{IN}$

من خلال المعادلة (2) لدينا $x = 1 - my$ ثم نعوض في المعادلة (1) نحصل على

$$m(1 - my) + y = 1$$

$$m - m^2y + y = 1$$

$$(1 - m^2)y = 1 - m$$

$$y = \frac{1-m}{1-m^2}$$

- إذا كان $1 - m^2 \neq 0$ فإن

$$= \frac{1-m}{(1-m)(1+m)} = \frac{1}{1+m}$$

حل التمرين الرابع:

$$2^n = x = 2^5$$

إذن

$$p = 33 \quad \text{و} \quad n = 5$$

إذن

$$4^n - 65 = p^2 \quad \text{إجمالاً } n = 5 \text{ و } p = 33 \text{ أو } n = 2 \text{ و } p = 9 \text{ تحققان المعادلة:}$$

حل التمرين الخامس:

1- المعادلة هي بداية لمطابقة هامة :

$$x^2 - 6x + 7 = x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2 - 3^2 + 7$$

$$= (x - 3)^2 - 9 + 7$$

$$= (x - 3)^2 - 2$$

$$(x - 3)^2 - 2 = (x - 3 - \sqrt{2})(x - 3 + \sqrt{2}) \quad -2$$

$$x = 3 - \sqrt{2} \quad x = 3 + \sqrt{2} \quad \text{إذن}$$

$$\text{و بالتالي} \quad S = \{3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\} \quad \text{هي المعادلة}$$

3- حلول النظام

$$\begin{cases} A + B = 6 & (1) \\ A^2 + B^2 = 22 & (2) \end{cases}$$

عند حل هذه النظام نذكر أن هذا مرتبط بالسؤال الثاني لذلك يجب أن تصبح النظام

عبارة عن معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد A و B

$$\text{لدينا } A = 6 - B \quad \text{ثم نعوض في (2)}$$

$$(6 - B)^2 + B^2 = 22$$

$$4^n + 65 = p^2$$

$$y^2 - x^2 = p^2 - (2^n)^2 = p^2 - 2^{2n}$$

لدينا

$$= p^2 - (2^2)^n = p^2 - 4^n = 65$$

$$(y - x)(y + x) = 65 = 13 \times 5$$

إذن

بما أن x و y هي أعداد صحيحة طبيعية

$$(-x < x) \quad ; \quad y - x < y + x \quad \text{و}$$

$$(S') \begin{cases} y - x = 1 & (3) \\ y + x = 65 & (4) \end{cases} \quad \text{أو} \quad (S) \begin{cases} y - x = 5 & (1) \\ y + x = 13 & (2) \end{cases}$$

2- لإيجاد n و p يكفي حل النظامين (S) و (S')

$$\text{لدينا} \quad x = 4 \iff y = 9 \iff 2y = 18 \iff (1) + (2)$$

$$2^n = x = 4 = 2^2$$

إذن

$$n = 2$$

و بالتالي

$$p = y = 9$$

من جهة أخرى

$$\text{إذن } n = 2 \text{ و } p = 9 \text{ تحقق المعادلة } 4^n + 65 = p^2$$

$$\text{في النظام } S' \text{ لدينا: } y = 33 \iff 2y = 66 \iff (4) + (3)$$

$$x = 65 - 33 = 32 = 2^5$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{x+1 - (x-1)}{U+V}$$

$$U - V = \sqrt{3} - 1 \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{2}{U - V}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2} = \sqrt{3} + 1$$

و بالتالي $U + V = \sqrt{3} + 1$ إذن الزوج (U, V) يحقق معادلتى (S) يعني يحقق النظام

$$\begin{cases} U + V = \sqrt{3} + 1 & (1) \\ U - V = \sqrt{3} - 1 & (2) \end{cases}$$

$$U = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow 2U = 2\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow (1) + (2)$$

$$V = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 1$$

$$36 - 12B + B^2 + B^2 = 22$$

$$2B^2 - 12B + 14 = 0$$

$$B^2 - 6B + 7 = 0$$

و هذا مل أردنا الحصول عليه !

حسب السؤال (2) لدينا $3 - \sqrt{2}$ و $3 + \sqrt{2}$ هو حلول المعادلة

و بالتالي $B = 3 + \sqrt{2}$ أو $B = 3 - \sqrt{2}$

$$A = 6 - B = 6 - 3 - \sqrt{2} \quad A = 6 - B = 6 - 3 + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$$

$$S = \{(3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}); (3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2})\}$$

حل التمرين السادس:

إذا كان x حل للمعادلة (E) فإن $U + V = \sqrt{3} - 1$

و بالتالي (U, V) تحقق المعادلة الثانية من النظام

بقي الآن أن نبين أن (U, V) تحقق المعادلة الأولى أي

يجب أن نبرهن أن $U + V = \sqrt{3} + 1$

$$U + V = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$$

$$= \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} \times \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

حسب المعطيات لدينا مجموع الأوراق هو 43 يعني :

$$X + Y = 43 \quad (1)$$

من جهة أخرى لدينا : 20 X هو المبلغ ضمن 1640 د

وكذلك 50 Y هو المبلغ المكون من أوراق 50 د

إذا أضعنا المبلغ 20 X و 50 Y نجد المبلغ الكلي 1640

وبالتالي $20 X + 50 Y + 1640$

إذا اختزلنا بالعدد 10 نجد $2 X + 5 Y = 164$ (2)

إننا نجد ما بحثنا عنه أي

$$\begin{cases} X + Y = 43 \\ 2 X + 5 Y = 164 \end{cases}$$

وحسب السؤال (1) لدينا $X = 17$ و $Y = 26$

إننا هناك 17 ورقة من فئة 20 درهم

كذلك 26 ورقة من فئة 50 درهم

وبالتالي $S = (\sqrt{3}, 1)$ حل وحيد للنظمة S

3- وجدنا من خلال السؤال (2) $\sqrt{x+1} = U = \sqrt{3}$

$$\sqrt{x-1} = V = 1$$

إننا $x+1=3$ و $(x-1=1)$

إننا $x=2$ (E)

$$\begin{cases} (1) \quad x + y = 43 \\ (2) \quad 2x + 5y = 164 \end{cases}$$

نضرب (1) في -2

$$\begin{cases} -2x - 2y = -86 \\ 2x + 5y = 164 \end{cases}$$

ثم نجمع: $3y = 78 \Rightarrow y = 26$ و $x = 43 - 26 = 17$

إننا (17, 26) حل وحيد للنظمة

حل التمرين السابع:

2- لاحظ أنه يجب استعمال السؤال (1) لحل هذه المسألة

وبالتالي يجب تحليل المعطيات و كتابتها على شكل رياضي من أجل الوصول

إلى كتابة نظمة السؤال (1)

X عدد أوراق 20 درهم

Y عدد أوراق 50 درهم

لاحظ أن : 1460 د مكونة من