الدرس الخامس عشر

المعلم في المستوى

ملخـــــــــــــــص الـــــــــــدرس

– إذا كان $A(x_A , y_A)$ و $B(x_B , y_B)$ فإن :

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A , y_B - x_A)$
- $I\left(\frac{x_A + x_B}{2} , \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ منتصف $[AB]$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

التماريــــــــــــــــــــــــــــــن :

التمرين الأول :

نعتبر $A(2 , 2)$ و $B(-1 , 3)$ و $C(0 , 3)$

1- حدد إحداثيتي كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

2- أحسب المسافات AB و BC و AC

3- حدد إحداثيتي D بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع

3- باستعمال علاقة شال في العلاقة : $\overrightarrow{oH} = \overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oD}$

$\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oD}$

بعد الإختزال نجد : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{oD}$

بما أن $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{oD}$ فإن $(AH) /\!/ (oD)$ (1)

و لدينا D مماثلة A بالنسبة للمستقيم (BC) يعني أن : $(BC) \perp (oD)$ (2)

من خلال (1) و (2) نستنتج أن (AH) عمودي على (BC)

استنتاج : H تمثل مركز تعامد المثلث ABC

يعني أن ارتفاعات المثلث ABC تتقاطع في النقطة H

4- G مركز ثقل المثلث ABC إذن :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ (خاصية في المثلثات)

$\overrightarrow{Go} + \overrightarrow{oA} + \overrightarrow{Go} + \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{Go} + \overrightarrow{oC} = \overrightarrow{0}$

إذن : $3\overrightarrow{Go} + \overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC} = \overrightarrow{0}$

أو $\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC} = 3\overrightarrow{oG}$ (3)

استنتاج :

حسب السؤال (2) لدينا : $\overrightarrow{oH} + \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC} = \overrightarrow{oH}$ (4)

إذن حسب (3) و (4) نستنتج أن $\overrightarrow{oH} = 3\overrightarrow{oG}$

و بالتالي النقط o و G و H مستقيمية

التمرين الثاني :

نعتبر النقط $A(-1,-1)$; $B(2,2)$ و $C(4,0)$ و $D(1,-3)$

1- بين أن ABCD مستطيل

2- نعتبر K بحيث $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ حدد إحداثيتي K

3- أنشىء E صورة A بالإزاحة التي تحول B إلى D

4- أنشىء F بحيث $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

ما طبيعة الرباعي AFCE .

التمرين الثالث :

نعتبر النقطتين $A(-1,3)$ و $B(5,-1)$

1- حدد إحداثيات C منتصف [AB]

2- حدد إحداثيات D بحيث $2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{BD} = 5\overrightarrow{BA}$

3- نعتبر $F(-4,5)$. بين أن النقط A و B و F مستقيمية

التمرين الرابع :

نعتبر النقط $A(3,-2)$ و $I(2,1)$

1- حدد إحداثيلت B بحيث I منتصف [AB]

2- لتكن $A'(\alpha,\beta)$. حدد α و β بحيث تكون A' صورة A بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{u}(2,-1)$

3- حدد إحداثيات النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{u}$

التمرين الخامس :

نعتبر النقط $A(5,-3)$ و $B(11,0)$ و $C(2,3)$

1- ما طبيعة المثلث ABC

2- لتكن النقطة $E(2,0)$

بين أن النقط A و B و C و E تنتمي إلى دائرة (ζ)

يتم تحديد إحداثيتي مركزها I و شعاعها r

حـــــــل تمـــاريــــــن معلـــــم في المستـــــــوى

حل التمرين الأول:

1- إحداثيات المتجهات :

$\overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A\ ,\ y_B - y_A)$

$\overrightarrow{AB}\ (-1 - 2\ ,\ 3 - 2)$

$\overrightarrow{AB}\ (-3\ ,\ 1)$

$\overrightarrow{AC}\ (0 - 2\ ,\ 3 - 2)$

$\overrightarrow{AC}\ (-2\ ,\ 1)$

و بالتالي $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\ (-3 - 2\ ,\ 1 + 1)$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\ (-5\ ,\ 2)$

-2

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$= \sqrt{(-1 - 2)^2 + (3 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 1}$$

$$= \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)}$$

$$= \sqrt{1 + 0}$$

$$= 1$$

$$AC = \sqrt{4 + 1}$$

$$= \sqrt{5}$$

3- ABCD متوازي الأضلاع إذن :

لدينا $\overrightarrow{AB}\ (-3\ ,\ 1)$ و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

و بالتالي

$$\begin{cases} -3 = x_C - x_D \\ 1 = y_C - y_D \end{cases}$$

و

أو

$$\begin{cases} -3 = -\ x_D \\ 1 = 3 - y_D \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = 2 \end{cases}$$

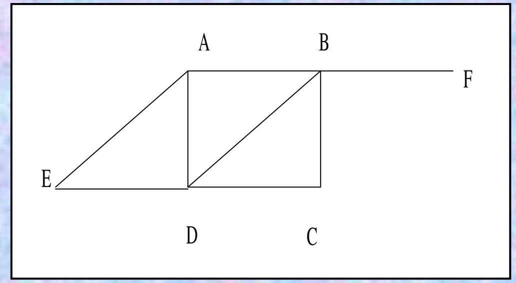
إذن $D\ (3\ ,\ 2)$

حل التمرين الثاني:

-1

$$AB = \sqrt{(2 + 1)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$DC = \sqrt{(1-4)^2 + (-3-0)^2}$$
$$= 3\sqrt{2}$$



إذن $AB = DC$

$$AD = \sqrt{(1+1)^2 + (-3+1)^2}$$
$$= \sqrt{8}$$
$$= 2\sqrt{2}$$
$$BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

إذن $AD = BC$ و بالتالي الضلعان المتقابلان متساويان

من جهة أخرى $\overrightarrow{AB}\,(3\,,3)$ و $\overrightarrow{DC}\,(3\,,3)$

إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ إذن $(AB) /\!/ (DC)$ و كذلك $(AD) /\!/ (BC)$

إذن يمكن القول أن ABCD معين يبقى أن نبين وجود زاوية قائمة على الأقل :

$$BD = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$$

نحسب

$$AB^2 + AD^2 = (3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2$$
$$= 18 + 8$$
$$= 26$$
$$= BD^2$$

و بالتالي حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية في المثلث ABD

لدينا ABD مثلث قائم الزاوية في A

و بالتالي ABCD مستطيل .

2- لدينا $\overrightarrow{AK}\,(x_K + 1\,,\, y_K + 1)$

إذن $\overrightarrow{AB}\,(3\,,3)$

يعني $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\,(1\,,1)$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

يعني أن
$$\begin{cases} x_K + 1 = 1 \\ y_K + 1 = 1 \end{cases}$$

يعني $K\,(0\,,0)$

3- E صورة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BD}$ إذن :

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE}$$

و بالتالي يمكن إنشاء E باعتبار الرباعي ABDE متوازي الأضلاع .

4- لدينا $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

باستعمال علاقة شال : $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

إذن : $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BA}$ أو $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB}$

هكذا تكون B منتصف [AF] و يمكن بذلك إنشاء النقطة F (أنظر الشكل)

انتبه : في غالب الأحيان يجب تبسيط علاقة المعطيات للوصول إلى كتابة مبسطة .

استنتاج $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AB}$$

و بالتالي : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EC}$

إذن : AFCE متوازي الأضلاع .

حل التمرين الثالث:

-1 $C\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

$C\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$

أي $C(2, 1)$

-2 لكي نحدد إحداثيات D يجب تبسيط كتابة العلاقة باستعمال علاقة شال :

$2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{BD} = 5\overrightarrow{BA}$

أو $2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{BA}$

$5\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BA}$

أو $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$

هكذا $\overrightarrow{BA}(-1 -5 , 3 + 1)$

$\overrightarrow{BA}(-6, 4)$ و $\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}\left(\frac{-12}{5}, \frac{8}{5}\right)$

$\overrightarrow{AD}(x_D + 1, y_D - 3)$

لدينا $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ إذن :

$$\begin{cases} x_D + 1 = \frac{-12}{5} \\ y_D - 3 = \frac{8}{5} \end{cases}$$

إذن

$$\begin{cases} x_D = \frac{-17}{5} \\ y_D = \frac{23}{5} \end{cases}$$

إذن $D\left(\frac{-17}{5}, \frac{23}{5}\right)$

-3 لدينا $\overrightarrow{AB}(6, -4)$

$\overrightarrow{AF}(-4 + 1, 5 - 3)$

أي $\overrightarrow{AF}(-3, 2)$

إذن نلاحظ أن : $-2\overrightarrow{AF}(6, -4)$

و بالتالي : $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AF}$

بذلك تكون النقط A , B و F مستقيمية .

حل التمرين الرابع:

لتكن $B(x_B, y_B)$ لدينا $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

أو $I\left(\frac{3 + x_B}{2}, \frac{-2 + y_B}{2}\right)$

و لدينا $I\,(2\,,1)$

يمكن استنتاج :
$$\begin{cases} \dfrac{3+x_B}{2}=2 \\ \dfrac{-2+y_B}{2}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3+x_B=4 \\ -2+y_B=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B=1 \\ y_B=4 \end{cases}$$

إذن $B\,(1\,,4)$

-2 A' صورة A بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{U}$ إذن $\overrightarrow{U}=\overrightarrow{AA'}$

إذن $\overrightarrow{AA'}\,(\alpha-3\,,\beta+2)$

$$\begin{cases} \alpha-3=2 \\ \beta+2=-1 \end{cases}$$

و بالتالي

$$\begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=-3 \end{cases}$$

-3 لدينا $\overrightarrow{U}=\overrightarrow{BB'}$

$$\begin{cases} x_{B'}-1=2 \\ y_{B'}-4=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{B'}=3 \\ y_{B'}=2 \end{cases}$$

$B'\,(3\,,2)$

حل التمرين الخامس:

-1

$$AB=\sqrt{(11-5)^2+3^2}$$
$$=\sqrt{45}$$
$$=3\sqrt{5}$$
$$AC=\sqrt{3^2+6^2}$$
$$=\sqrt{45}$$
$$=3\sqrt{5}$$
$$BC=\sqrt{9^2+3^2}$$
$$=3\sqrt{10}$$

إذن ABC متساوي الساقين .

من جهة آخرى يجب حساب $AB^2+AC^2=45+45=90$

$BC^2=90$

إذن $AB^2+AC^2=BC^2$

و بالتالي ABC قائم الزاوية في A .

-2 لدينا A , B , C و E تنتمي إلى الدائرة $\zeta(I\,,r)$ إذن :

$$\begin{cases} IA=IB \\ IC=IE \end{cases}$$

$$IA^2=(5-x_I)^2+(-3-y_I^{\,2})$$

$IB^2 = (11 - x_I)^2 + y_I^2$

لدينا $IA^2 = IB^2$ إذن

$(5 - x_I)^2 + (-3 - y_I^2) = (11 - x_I)^2 + y_I^2$

$25 - 10x_I + x_I^2 + 9 + 6y_I + y_I^2 = 121 - 22x_I + x_I^2 + y_I^2$

$$\boxed{12x_I + 6y_I = 87} \qquad (1)$$

من جهة آخرى

$IC^2 = (2 - x_I)^2 + (3 - y_I^2)$

$IE^2 = (2 - x_I)^2 + y_I^2$

إذن : $IC^2 = IE^2$

$(2 - x_I)^2 + (3 - y_I^2) = (2 - x_I)^2 + y_I^2$

$4 - 4x_I + x_I^2 + 9 - 6y_I + y_I^2 = 4 - 4x_I + x_I^2 + y_I^2$

بعد الإختزال

$9 - 6y_I = 0$

$6y_I = 9$

$y_I = \frac{3}{2}$

و بتعويض y_I في العلاقة (1) نحصل :

$12x_I + 6 \times \frac{3}{2} = 87$

$12x_I = 78$

$x_I = \frac{78}{12} = \frac{13}{2}$

و بالتالي إحداثيات $I\left(\frac{13}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$r = IA = \sqrt{\left(5 - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(-3 - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{18}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

و بالتالي $\zeta\left(I\left(\frac{13}{2}, \frac{3}{2}\right), \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$