الدرس الثاني عشر

الزوايا المحيطية و الزوايا المركزية

ملخص الدرس

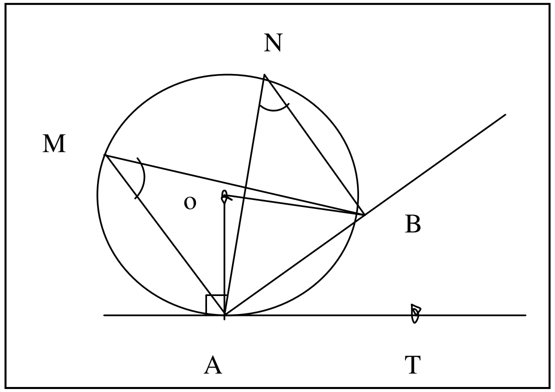
خاصيات :

– الزاويتان المحيطيان $A\hat{M}B$ $A\hat{N}B$ تحصران نفس القوس AB متقايستان

– الزاوية المركزية $A\hat{o}B$ تحصر نفس القوس AB و لنا $A\hat{o}B = 2A\hat{M}B$

– إذا كان (AT) مماس للدائرة في A لدينا $T\hat{A}B$ تحصر نفس القوس AB

بذلك $T\hat{A}B = A\hat{M}B$



التمارين :

التمرين الأول :

لتكن ζ دائرة محيطة بمثلث

متساوي الأضلاع ABC

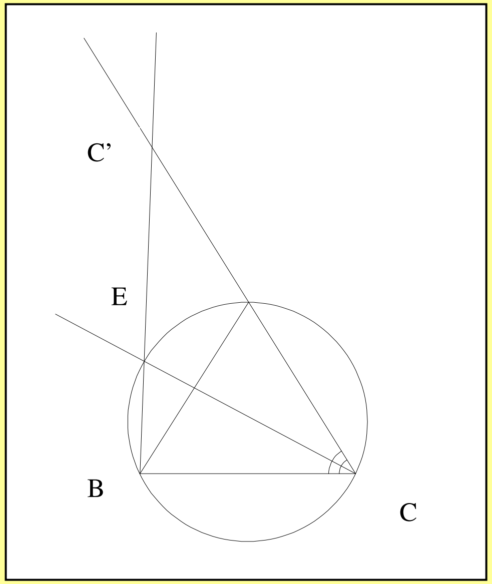
المنصف الداخلي للزاوية $A\hat{C}B$

يقطع C في E

(BE) و (CA) يتقاطعان في C’

1- أحسب $A\hat{B}E$ و استنتج $E\hat{B}C$

2- بين أن AC = AC’



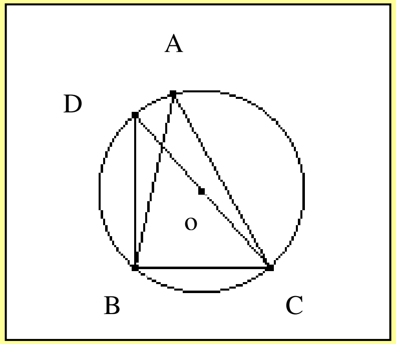
التمرين الثاني :

ليكن ABC مثلث بحيث $B\hat{A}C = 40°$

الدائرة المحيطة بالمثلث o و شعاعها r

و ليكن ζ التي مركزها

1- أعط قياس $B\hat{D}C$ و $B\hat{o}C$



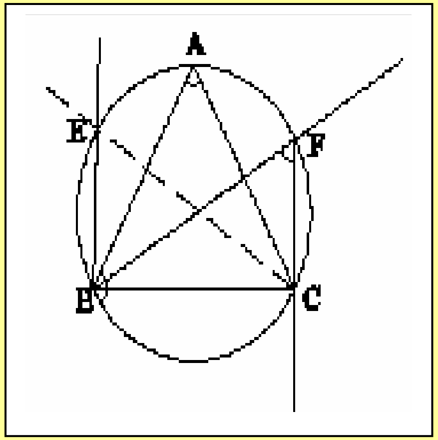
2- استنتج أن $BC = 2r \quad \sin 40°$

التمرين الثالث:

ليكن ABC مثلثا بحيث $B\hat{A}C = 60°$ و ج الدائرة المحيطة بالمثلث

المنصفان الداخليان للزاويتين $A\hat{C}B$ و $A\hat{B}C$ يقطعان على التوالي الدائرة ج

في E و F



1- بين أن $A\hat{B}E = B\hat{C}E$

و $A\hat{C}F = C\hat{B}F$

2- بين أن $E\hat{B}F = 60°$

ثم استنتج أن : $E\hat{B}F = B\hat{F}C$

3- بين أن $(BE) /\!/ (FC)$

التمرين الرابع:

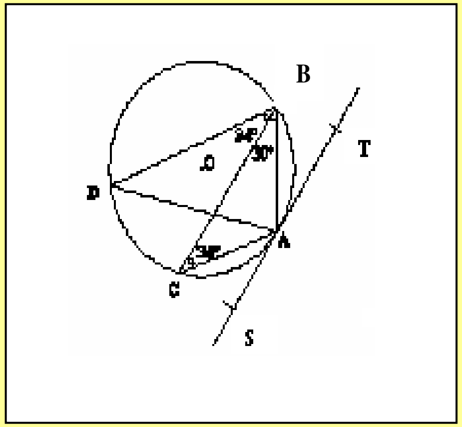
لتكن ج دائرة مركزها o محيطة بالمثلث ABC

بحيث $A\hat{C}B = 34°$ و $A\hat{B}C = 30°$

(AS) مماس للدائرة ج في النقطة A

لتكن D نقطة على الدائرة X

بحيث $B\hat{A}D = 82°$



1- حدد قياس الزاويا

$A\hat{D}B$ و $T\hat{A}B$ و $S\hat{A}B$

2- بين أن $(AC) /\!/ (BD)$

نصائــــــح هـــــــــامة جــــــدا

- لا تتحدث أبدا عن الآخرين بحديث سوء
- لا تتحدث أبدا عن نفسك بحديث سوء
- راقب نفسك واحفض لسانك، اختزل من قاموسك الكلمات السلبية و وظف عوضها الكلمات اللطيفة المهذبة
- إن لوقع الكلمات قوة سحرية في تغيير المواقف المتشددة و في فتح القلوب الموصدة و في تليين الطبائع الغليظة.
- فكر طويلا لما تقوله للآخر وزن الكلمات التي تود أن تقولها بميزان الذهن.

حــــــــــــــــــــــل تمـاريـــــن الـزوايا المحيطيـة و الـزوايـا المركـزيــــة

حل التمرين الأول:

1- لدينا المثلث (ABC) متساوي الأضلاع

و بالتالي $A\hat{B}C = A\hat{C}B = B\hat{A}C = \frac{180°}{3} = 60°$

لدينا الزاوية $A\hat{B}E$ زاوية محيطية تحصر القوس EA

و كذلك الزاوية $E\hat{A}C$ تحصر القوس EA

إذن: $A\hat{B}E = E\hat{C}A$ و من جهة آخرى $E\hat{C}A = \frac{1}{2} B\hat{C}A$

لأن EC هو المنصف الزاوية الداخلية $B\hat{C}A$ و بالتالي:

$$A\hat{B}E = E\hat{C}A = \frac{1}{2} B\hat{C}A = 30°$$

استنتاج : $E\hat{B}C = E\hat{B}A + A\hat{B}C = 30° + 60° = 90°$

2- لدينا المثلث C B'C هو قائم الزاوية لأن $E\hat{B}C = 90°$ حسب السؤال (1)

و لدينا مجموع زوايا مثلث هو $180°$ إذن :

$$B\hat{C}'C + C'\hat{C}B + C\hat{B}C' = 180°$$

إذن: $B\hat{C}'C = 180° - C'\hat{C}B - C\hat{B}C'$

$= 180° - 60° - 90°$

$= 30°$

الآن نعتبر المثلث $A\,C'B$ لدينا $A\hat{B}C' = A\hat{B}E = 30°$ من خلال السؤال (1)

و برهنا أن : $B\hat{C'}C = 30°$

و بالتالي المثلث $(A\,B\,C')$ متساوي الساقين رأسه A

بمعنى أن $AC' = AB$

و لدينا ABC متساوي الأضلاع إذن $AC' = AB = AC$

<u>حل التمرين الثاني:</u>

1- $B\hat{D}C$ زاوية محيطية نفس القوس BC الذي تحصره الزاوية $B\hat{A}C$

و بالتالي $B\hat{D}C = B\hat{A}C = 40°$

$B\hat{o}C = 2\,B\hat{A}C = 80°$ لأنها مركزية

2- للبرهنة على علاقة ما،، يجب تحليلها جيدا :

ما يوجد داخل هذا الإطار يكتب فقط في ورقة البحث

إذن يجب أن نبين أن $BC = 2\,r\sin 40°$

أو $\sin 40° = \dfrac{BC}{2\,r}$

أو $\sin 40° = \dfrac{BC}{DC}$ **(1)**

الآن يمكننا إذن البحث عن مثلث قائم الزاوية ضلعاه BC و DC

و البحث عن زاوية قياسها 40° لتطبيق العلاقة المثلثية :

المثلث واضح هو BCD لأن الضلعان يوجدان في العلاقة (1)

و الزاوية القائمة هي $D\hat{B}C$ و ذلك لأن DC هو قطر الدائرة

و بالتالي تكون أي نقطة على الدائرة زاوية قائمة مع هذا الوتر DC

لاحظ أن $D\hat{A}C$ هي زاوية قائمة كذلك

إذن في المثلث BDC لدينا :

$$\sin B\hat{D}C = \frac{BC}{DC}$$

حسب السؤال (1) لدينا $B\hat{D}C = 40°$

$$\sin 40° = \frac{BC}{2\,r}$$

يعني $\boxed{BC = 2\,r \times \sin 40°}$

<u>حل التمرين الثالث:</u>

1- $A\hat{B}E$ و $A\hat{C}E$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوسEA إذن متقايستان

و بما أن EC منصف الزاوية $A\hat{C}B$ فإن

إذن $A\hat{B}E = A\hat{C}E = E\hat{C}B$

لدينا $A\hat{C}F$ و $A\hat{B}F$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AF

إذن $A\hat{C}F = A\hat{B}F = F\hat{B}C$

-2

$$E\hat{B}F = E\hat{B}A + A\hat{B}F$$

$= B\hat{C}E + A\hat{B}F$ <== (1) حسب السؤال

$$= \frac{1}{2} B\hat{C}A + \frac{1}{2} A\hat{B}C$$

$$= \frac{1}{2}(B\hat{C}A + A\hat{B}C)$$

في المثلث ABC لدينا $A\hat{B}C + B\hat{C}A + B\hat{A}C = 180°$

و من خلال المعطيات لدينا $B\hat{A}C = 60°$ إذن

$$A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180° - 60° = 120°$$

و بالتالي $E\hat{B}F = \frac{1}{2}(A\hat{B}C + B\hat{C}A)$

$$= \frac{1}{2} \times 120$$

$$= 60°$$

استنتاج : لدينا الزاويتان $B\hat{A}C$ و $B\hat{F}C$ تحصران نفس القوس BC إذن

$$B\hat{F}C = B\hat{A}C = 60°$$

و بالتالي $\boxed{B\hat{F}C = E\hat{B}F}$

3- لدينا (BE) و(CF) يحددان مع المستقيم (BF) زاويتين داخليا هما $B\hat{F}C$ و$E\hat{B}F$ اللتان هما متقايستان و بالتالي يمكن القول أن (BE) يوازي (CF)

حل التمرين الرابع:

1- الزاويتان المحيطيتان $A\hat{D}B$ و $A\hat{C}B$ تحصران نفس القوس BA وبالتالي هما متقايستان

إذن $A\hat{D}B = A\hat{C}B = 14°$

* $T\hat{A}B$ هي زاوية محيطية تحصر نفس القوس BA و بالتالي $T\hat{A}B = 34°$

*حذار $S\hat{A}B$ لا تحصر نفس القوس BA

حساب $S\hat{A}B$: لدينا $S\hat{A}B$ و $T\hat{A}B$ زاويتان متكاملتان و بالتالي :

$$S\hat{A}B + B\hat{A}T = 180°$$

إذن $S\hat{A}B = 180° - B\hat{A}T$

$$= 180° - 34°$$

$$= 146°$$

2- أسئلة التوازي يمكن البرهنة عليها مرارا كما في التمرين السابق باختيار زاويتين متبادلتين داخليا هكذا للبرهنة أن $(BD) \parallel (AC)$ نبرهن أن :