$$= \frac{AB + AC}{AB \times AC}$$

إذن

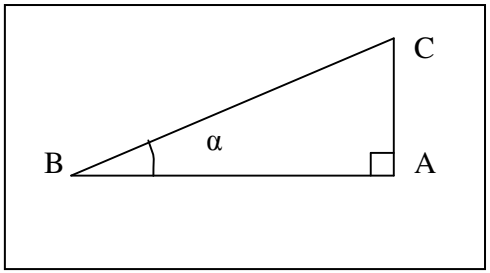
$$AI = \sqrt{2}\ \frac{AB \times AC}{AB + AC}$$

الدرس الحادي عشر

الحساب المثلثي

ملخـــــــص الـــــــــــــــدرس

1- النسب المثلثية في المثلث القائم الزاوية :



ABC مثلث قائم الزاوية في A

α قياس بالدرجة للزاوية [$\hat{B}$]

$(0° < \alpha < 90°)$

جيب α هو النسبة $\frac{AC}{BC}$ و نكتب : $\sin\alpha = \frac{AC}{BC}$

جيب تمام α هو النسبة $\frac{AB}{BC}$ ونكتب : $\cos\alpha = \frac{AB}{BC}$

ظل α هو النسبة $\frac{AC}{AB}$ ونكتب : $\tan\alpha = \frac{AC}{AB}$

الأعداد $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ و $\tan\alpha$ تسمى النسب المثلثية للزاوية [$\hat{B}$]

ملاحظات :

- $\sin \alpha = \dfrac{\text{طول الضلع المقابل ل}[\hat{B}]}{\text{طول الوتر}}$
- $\cos \alpha = \dfrac{\text{طول الضلع المحاذي ل}[\hat{B}]}{\text{طول الوتر}}$
- $\tan \alpha = \dfrac{\text{طول الضلع المقابل ل}[\hat{B}]}{\text{طول الضلع المحاذي ل}[\hat{B}]}$

2- خاصيات : α قياس لزاوية حادة غير منعدمة

$0 < \sin \alpha < 1$
$0 < \cos \alpha < 1$

$\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

3- العلاقات بين النسب المثلثية لزاويتين متتامتين

إذاكان α و β قياسي ززاويتين متتامتين غير منعدمتين$(\alpha + \beta = 90°)$
فإن : $\sin \beta = \cos \alpha$ و $\cos \beta = \sin \alpha$ و $\tan \beta = \dfrac{1}{\tan \alpha}$

4- النسب المثلثية لزوايا خاصة :

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معروف

التماريـــــــــــــــــــــــــن :

<u>التمرين الأول :</u>

1- بين أن

$$\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \sin^2 x$$

$$\frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x$$

$$\frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

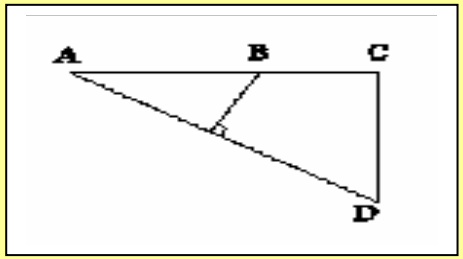
$$\frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x} = 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x} \times \sqrt{1+\sin x}} = 1$$

التمرين الثاني :

ليكن ADC مثلث قائم الزاوية في A



بحيث $AC = 6$; $CD = 3$; $BC = 2$

1- أحسب $\sin \hat{A}$

2- استنتج قيمة BE

نعتبر مثلثا EFG قائم الزاوية في E

حيث $E\hat{G}F = 30°$ و $EG = 3$

1- أحسب GF و EF

2- ليكن H المسقط العمودي E على (GF)

أحسب EH و GH و FH

التمرين الثالث :

ABC مثلث قائم الزاوية في A

حيث $AC = 2\sqrt{3}$ و $A\hat{B}C = 60°$

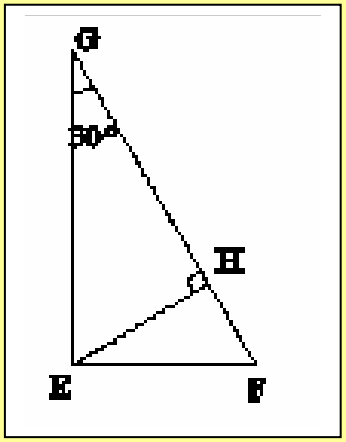
1- أحسب BC

2- ليكن α قياس زاوية حادة

حيث $\cos \alpha = \frac{5}{7}$. أحسب $\sin \alpha$

3- أحسب قيمة A حيث :

$A = \sin^2 24° - \tan^2 45° + \sin^2 66°$



التمرين الرابع :

1- أحسب: $\sin^2 10° + \sin^2 80°$

2- α قياس زاوية حادة حيث $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

أحسب $\sin \alpha$

3- x زاوية حادة غير منعدمة

نعتبر $A = \cos^2 x \sin^2 x + \cos^4 x$

بين أن $A = \cos^2 x$ ثم أحسب A علما أن $x = 30°$

التمرين الخامس :

ABC قائم الزاوية في A حيث $\cos(A\hat{B}C) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ و $BC = 10cm$

1- أحسب $\sin A\hat{B}C$ و $\tan A\hat{B}C$

2- أحسب AB و AC ثم أنشيء الشكل

3- H هي المسقط العمودي للنقطة A على BC

بين أن $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ ثم استنتج المسافة AH

التمرين السادس :

أحسب مايلي :

$A = \cos 5° + 2\sin^2 22° - \sin 85° + 2\sin^2 68°$

$B = 5\sin^2 34° + 3\cos^2 11° + 5\sin^2 56° + 3\cos^2 79°$

$C = 2\cos^2 22° - \tan^2 45° + 2\cos^2 68° + \sin^2 30°$

$D = \tan 70° - \frac{1}{\tan 20°} + \frac{2}{\tan 60°}$

التمرين السابع :

1- إذا علمت أن $\tan \alpha = \sqrt{3}$ حيث $0 < \alpha < 90°$

أحسب $\cos \alpha$ و $\sin \alpha$

2- ليكن α قياسا لزاوية حادة بحيث :

$\tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = 5$

أحسب $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$

خطة لخمس سنوات

إذا كان ليك خطة لخمس أو عشر سنوات و لديك متابعة جيدة فعادة ما تحقق أكثر و أكبر مما خططت إليه. إليك الآن نموذج لمخطط متوسط المدى يمكنك تعديله أو تغييره حسب رؤاك و أهدافك للمستقبل.

خطة لخمس سنوات

إذا كان ليك خطة لخمس أو عشر سنوات و لديك متابعة جيدة فعادة ما تحقق أكثر و أكبر مما خططت إليه. إليك الآن نموذج لمخطط متوسط المدى يمكنك تعديله أو تغييره حسب رؤاك و أهدافك للمستقبل.

المجالات	الأهداف	بدء التنفيد	نهاية التنفيد	الحصيلة
الجانب الديني	- حفظ القرآن الكريم - قيام الليل - اشتراك في جمعية لدعم المحتاجين و الفقراء - صوم - حفظ الأربعين النووية	- 01 يناير 2007 - ليلة كل أسبوع - 2008 - الإثنين و الخميس - 15 مارس 2008	- 31 دجنبر 2011 - ليلة كل أسبوع - 2011 -الإثنين و الخميس - 15 مارس 2010	
الجانب الدراسي	- النجاح في الثالثة إعدادي بمعدل مهم - النجاح في الأولى ثانوي بمعدل مهم - حسن إختيار الشعبة الملائمة في التوجيه - النجاح في السادسة ثانوي و الباكالوريا بمعدل جد مهم - مراسلة المدارس داخل و خارج البلاد - اختيار المدارس المتخصصة عوض الجامعات - الإهتمام باللغات : الفرنسية و الإنجليزية	- 15 شتنبر 2006 - 15 شتنبر 2007 - 15 شتنبر 2008 - 15 شتنبر 2008 - 15 شتنبر 2009 - 30 يونيو 2010 - 15 شتنبر 2006	- 30 يونيو 2007 - 30 يونيو 2008 - 30 مارس 2008 - 30 يونيو 2010 - 10 شتنبر 2010 - 1 شتنبر 2010 - 30 يونيو 2011	
الجانب الثقافي و الترفيهي و الرياضي	- المطالعة بالعربية و الفرنسية و الإنجليزية - دروس مسائية في تعلم اللغات - رحلات استكشافية - تعلم السباحة و ركوب الفرس - الإلتزام برياضة جماعية	- 15 شتنبر 2006 - 15 شتنبر 2006 - 1 غشت كل عام - 1 يوليوز كل عام - يوم في الأسبوع	- 31 دجنبر 20011 - 30 يونيو 2010 - 22 غشت كل عام - 31 يوليوز كل عام - يوم في الأسبوع	
جانب تنمية القدرات	- تعلم التجارة شراء أشياء و بيعها - تعلم إدارة الحوار و ترتيب الأفكار	- أيام العطل - أيام العطل	- أيام العطل - أيام العطل	

حـــــــــــــــــــــل تماريـــــن مبرهنـــة فيثاغورس

<u>حل التمرين الأول:</u>

$$\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{(\frac{\sin x}{\cos x})^2}{1+(\frac{\sin x}{\cos x})^2} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{\cos^2 x}{1}$$

$$= \sin^2 x$$

$$\frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

لاحظ أن $1 - \cos x$ توجد في المقام إذن نظرب في المرافق :

$$\frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{1+\cos x}{\sin x} \times \frac{1-\cos x}{1-\cos x}$$

$$= \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{\sin x (1-\cos x)}$$

$$= \frac{1-(\cos x)^2}{\sin x (1-\cos x)}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\sin x (1-\cos x)}$$

$$= \frac{\sin x}{1-\cos x}$$

$$\frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x} = \frac{\sin^2 x (1-\sin^2 x)}{\cos^2 x (1-\cos^2 x)}$$

$$= \frac{\sin^2 x \times \cos^2 x}{\cos^2 x \times \sin^2 x}$$

$$= 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (-\cos^2 x + 1)$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x} \times \sqrt{1+\sin x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$$

$$= \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$= \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$= 1$$

<u>حل التمرين الثاني:</u>

في المثلث ACD لدينا

$$\sin \hat{A} = \frac{CD}{AD}$$

1- حسب فيثاغورس

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{CD}{\sqrt{AC^2 + CD^2}} = \frac{3}{\sqrt{36+9}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{45}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}$$

2- في المثلث ABE لدينا

$$\sin \hat{A} = \frac{BE}{AB} \quad \left(\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية}}{\text{الوتر}}\right)$$

إذن

$BE = AB \times \sin \hat{A}$

و بالتالي

$BE = (AC - BC) \sin \hat{A}$

$= 4 \times \frac{1}{\sqrt{5}}$

$= \frac{4\sqrt{5}}{5}$

حل التمرين الثالث:

1- في المثلث EGF لدينا :

$\cos \hat{G} = \frac{EG}{GF}$

$GF = \frac{EG}{\cos \hat{G}} = \frac{3}{\cos 30°} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \frac{6}{\sqrt{3}}$

$= 2\sqrt{3}$

و حسب فيثاغورس $GF^2 = EF^2 + EG^2$

يعني $EF = \sqrt{GF^2 + EG^2} = \sqrt{3}$

أو بستعمال $\sin \hat{G} = \frac{EF}{GF} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

نجد $EF = GF \times \sin \hat{G} = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$

حساب EH :

$\sin \hat{G} = \frac{EH}{EG}$

- $EH = EG \times \sin \hat{G} = 3 \times \sin 30° = \frac{3}{2}$

$\cos \hat{G} = \frac{GH}{EG}$

- $GH = EG \times \cos \hat{G} = 3 \cos 30° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- $FH = GF - GH = 2\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

حل التمرين الرابع:

1- لدينا

$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$

$BC = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

2- لدينا

$\cos \alpha = \frac{5}{7}$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$

3- قيمة A :

$A = \sin^2 24° - \tan^2 45° + \sin^2 66°$

لاحظ أن $24° + 66° = 90°$ إذن الزاويتان $24°$ و $66°$ هما متتامتان

و بالتالي $\sin 24° = \cos 66°$

من جهة آخرى $\tan 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1$

$A = \cos^2 66° + \sin^2 66° - 1$

$= 1 - 1$

$= 0$

حل التمرين الخامس:

حساب : $\sin^2 10° + \sin^2 80°$

لاحظ أن $10° + 80° = 90°$ يعني $10°$ و $80°$ متتامتان

$\sin^2 10° + \sin^2 80° = \cos^2 80° + \sin^2 80° = 1$

2- $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$

3-

$A = \cos^2 x \sin^2 x + \cos^4 x$

$= \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$

$= \cos^2 x \times 1$

$= \cos^2 x$

حساب A عندما يكون $x = 30°$

$A = \cos^2 30° = (\cos 30°)^2$

$= (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

$= \frac{3}{4}$

حل التمرين السادس:

$\sin^2 A\hat{B}C = 1 - \cos^2 A\hat{B}C$

$= 1 - (\frac{2\sqrt{5}}{5})^2$

$= 1 - \frac{4}{5}$

$= \frac{1}{5}$

$\sin A\hat{B}C = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan A\hat{B}C = \frac{\sin A\hat{B}C}{\cos A\hat{B}C} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{2\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}$

-2

$\cos A\hat{B}C = \frac{AB}{BC}$

$AB = BC \times \cos A\hat{B}C = 10 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$= 4\sqrt{5}$

$\sin A\hat{B}C = \frac{AC}{BC}$

$AC = BC \times \sin A\hat{B}C = 10 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

3- نبرهن أن

(1) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

لاحظ أننا يمكن تحليل هذه العلاقة كما يلي نضرب العلاقة في AH^2

العلاقة (1) تكافىء

$1 = \frac{AH^2}{AB^2} + \frac{AH^2}{AC^2}$

$1 = (\frac{AH}{AB})^2 + (\frac{AH}{AC})^2$ يعني

$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ وهذه العلاقة تذكرنا بالعلاقة

كل ما في هذا الإطارمكتوب مضغوط يكون في الهامش

لدينا (2) $\sin A\hat{B}C = \frac{AH}{AB}$ باعتبار المثلث ABH

و باعتبار المثلث ABH لدينا $\sin A\hat{C}B = \frac{AH}{AC}$

من جهة آخرى لدينا $A\hat{B}C$ و $A\hat{C}B$ متتامتان لأنهما داخل مثلث قائم الزاوية في A

و بالتالي $\cos A\hat{B}C = \sin A\hat{C}B = \frac{AH}{AC}$ (3)

حسب (2) و (3)

$\sin^2 A\hat{B}C = (\frac{AH}{AB})^2$

$\cos^2 A\hat{B}C = (\frac{AH}{AC})^2$

و بالتالي باستعمال هذه العلاقة $\sin^2 A\hat{B}C + \cos^2 A\hat{B}C = 1$ يمكن أن نكتب

$$(\frac{AH}{AB})^2 + (\frac{AH}{AC})^2 = 1$$

$$\frac{AH^2}{AB^2} + \frac{AH^2}{AC^2} = 1$$ إذن

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$$ إذن

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{80} + \frac{1}{20} = \frac{1}{100}$$

$$AH^2 = 100$$

$$\boxed{AH = 10}$$

حل التمرين السابع:

- لاحظ أن $5°$ و $85°$ متتامتان و نفس الشيء بالنسبة ل $22°$ و $68°$

إذن $\sin 85° \cos 5°$ و $\sin 22° = \cos 68°$

$$A = \sin 85° - \sin 85° + 2\cos^2 68° + 2\sin^2 68°$$

$$= 2(\cos^2 68° + \sin^2 68°)$$

$$= 2 \times 1$$

$$= 1$$

- لاحظ أن $34° + 56° = 90°$ و $11° + 79° = 90°$ إذن

$$B = 5\sin^2 34° + 5\cos^2 34° + 3\sin^2 79° + 3\cos^2 79°$$

$$= 5(\sin^2 34° + \cos^2 34°) + 3(\sin^2 79° + \cos^2 79°)$$

$$= 5 + 3$$

$$= 8$$

- لاحظ أن $68° + 22° = 90°$

$$C = 2\sin^2 68° + 2\cos^2 68° - \tan^2 45° + \sin^2 30°$$

$$= 2(\sin^2 68° + 2\cos^2 68°) - 1 + (\frac{1}{2})^2$$

$$= 2 - 1 + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{5}{4}$$

- لاحظ أن $20° + 70° = 90°$

إذن $\tan 70° = \frac{1}{\tan 20°}$ و بالتالي :

$$D = \frac{1}{\tan 20°} - \frac{1}{\tan 20°} + \frac{2}{\tan 60°}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

حل التمرين الثامن:

1- لدينا $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

من جهة آخرى : $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

إذن $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\tan\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$

نرفع إلى المربع :

$\tan^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

إذن $\cos^2\alpha\tan^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\tan^2\alpha = 1$

$1 = \cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha)$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+3}}$

إذن $\boxed{\cos\alpha = \frac{1}{2}}$

$\sin\alpha = (\cos\alpha) + (\tan\alpha)$

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3}$

إذن $\boxed{\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

يمكن كذلك استعمال العلاقة:

$\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

المبرهن عليها في التمرين الأول

2- لدينا

$\tan\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} = 5$

$\frac{1}{\cos\alpha} = 5 - \tan\alpha$

$(\frac{1}{\cos\alpha})^2 = (5 - \tan\alpha)^2$

باستعمال العلاقة : $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$

$1 + \tan^2\alpha = 25 - 10\tan\alpha + \tan^2\alpha$

$10\tan\alpha = 24$

إذن : $\tan\alpha = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$

$$\sin \alpha = \frac{12}{13}$$

و بالتالي:

$$\frac{1}{\cos \alpha} = 5 - \tan \alpha$$

$$= 5 - \frac{12}{5}$$

$$= \frac{25 - 12}{5}$$

$$= \frac{12}{5}$$

إذن

$$\frac{1}{\cos \alpha} = 5 - \tan \alpha$$

$$= 5 - \frac{12}{5}$$

$$= \frac{25 - 12}{5}$$

$$= \frac{13}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha \times \tan \alpha$$

$$= \frac{5}{13} \times \frac{12}{5}$$

$$= \frac{12}{13}$$