الدرس الرابع عشر

الازاحة و المتجهات

ملخـــــــــــــــــص الــــــــــــدرس

– صورة نقطة M بالإزاحة التي تحول A إلى B هي النقطة M’ بحيث

ABM’M متوازي الأضلاع و نكتب $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$

خاصية :

إ ذا كانت M’ و N’ صورتي M و N على التوالي بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$

فإن : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

خاصية :

إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فإن الرباعي ABCD متوازي الأضلاع

التماريـــــــــــــــــــــــــن :

التمرين الأول :

ليكن ABC مثلثا

1- أنشيء النقطة D صورة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BC}$

2- استنتج طبيعة الرباعي ADCB

3- أنشيء النقطة E بحيث $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$

4- حدد صورة المثلث ABC بالإزاحة التي تحول B إلى C . معللا جوابك

التمرين الثاني :

ليكن ABCD متوازي أضلاع مركزه o و لتكن G بحيث :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$$

1- أنشيء G و بين أن $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{Ao}$

2- نعتبر H بحيث $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$

أنشيء H و بين أن $\overrightarrow{HG} = 4\,\overrightarrow{AD}$

3- بين أن النقط o و G و H مستقيمية

التمرين الثالث :

ليكن ABCD متوازي أضلاع

و M نقطة بحيث : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}$

1- بين أن A هي منتصف [BM]

2- لتكن E هي صورة D بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BD}$

بين أن D هي منتصف [BE]

التمرين الرابع :

ليكن ABC مثلث و I منتصف [AB]

1- أنشيء J صورة I بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BC}$

2- أنشيء F بحيث $\overrightarrow{BF} = 2\ \overrightarrow{IJ}$

3- بين أن صورة C بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BC}$ هي F

4- بين أن IAJC متوازي الأضلاع و استنتج أن النقط F, J , A مستقيمية

التمرين الخامس :

ليكن ABC مثلثا و o مركز دائرته المحيطية

و لتكن D مماثلة o بالنسبة للمستقيم (BC)

1- بين أن $\overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC} = \overrightarrow{oD}$

2- أنسيء H بحيث $\overrightarrow{oH} = \overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC}$

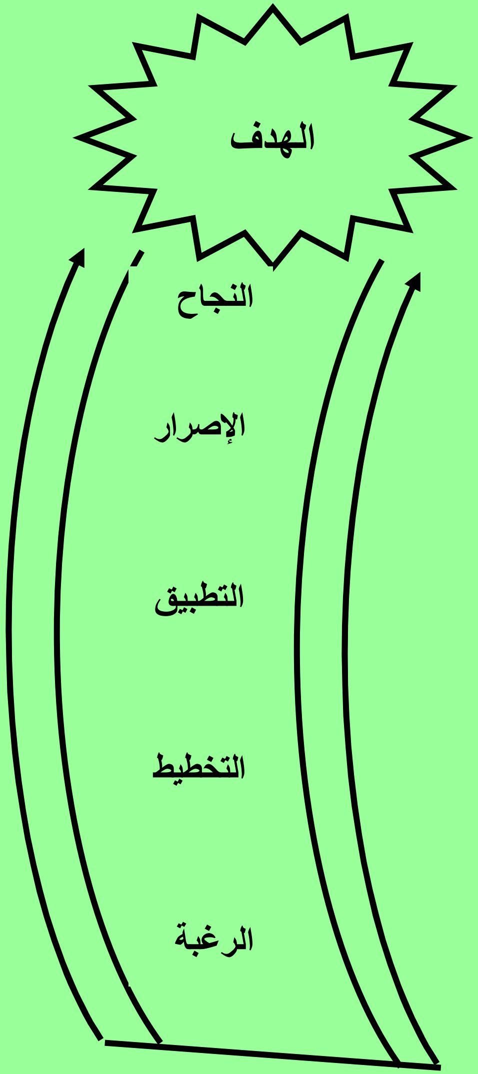
3- بين أن $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{oD}$ و استنتج أن $(AH) \perp (BC)$

ماذا تمثل H بالنسبة للمثلث ABC

4- لتكن G مركز ثقل المثلث ABC

بين أن $\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC} = 3\ \overrightarrow{oG}$

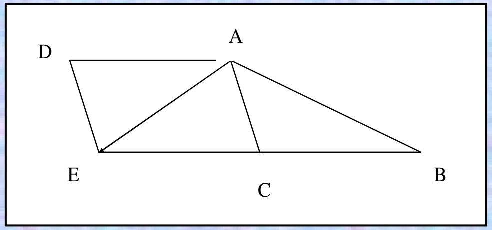
و استنتج أن النقط o و H و G مستقيمية



حـــــــــــــــــل تمـاريـــــن الإزاحــة و المتجهــات

حل التمرين الأول:

1- D صورة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BC}$



إذن : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

و بالتالي ABCD متوازي الأضلاع

3- لدينا $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$

إذن $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC}$

و منه نجد $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC}$

و بالتالي يمكن إنشاء E باعتبار ADEC متوازي الأضلاع

4- صورة المثلث ABC بالإزاحة التي تحول B إلى C ؟

هي صورة المثلث ABC بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BC}$

لدينا من خلال السؤال (1) صورة A هي D بالإزاحة $\overrightarrow{BC}$

من جهة ثانية صورة B هي C لأن B تحول إلى C بالإزاحة $\overrightarrow{BC}$

لدينا كذلك من خلال السؤال (3) ADEC متوازي الأضلاع

لأن لدينا $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$

إذن : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$

إذن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$

و لدينا $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

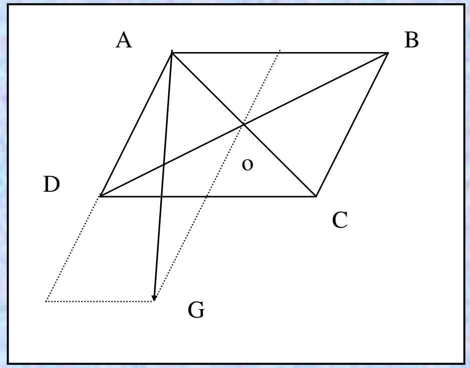
إذن $\boxed{CE = BC}$

و بالتالي صورة C هي E بالإزاحة $\overrightarrow{BC}$

إذن صورة المثلث ABC هي المثلث DCE

حل التمرين الثاني:

1- لدينا $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$



$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

بما أن ABCD متوازي أضلاع فإن :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

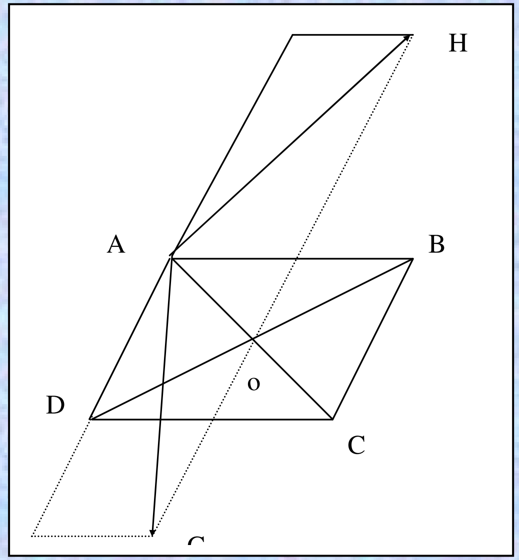
$$\overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}(2\,\overrightarrow{Ao})$$

$$= \overrightarrow{Ao}$$

وبالتالي $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{Ao}$

2- لدينا $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{GH} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

$= -\frac{8}{2}\overrightarrow{AD}$

$= -4\,\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{HG} = 4\,\overrightarrow{AD}$

3- حسب السؤال (1) لدينا $\overrightarrow{Do} = \overrightarrow{Ao}$

إذن DGAo متوازي الأضلاع

إذن $\overrightarrow{oG} = \overrightarrow{AD}$

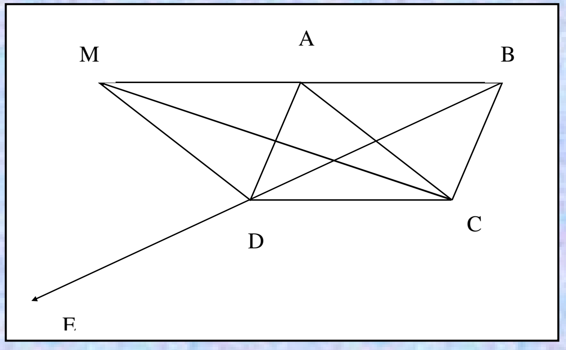
و حسب السؤال (2) $\overrightarrow{HG} = 4\,\overrightarrow{AD}$

إذن $\overrightarrow{HG} = 4\,\overrightarrow{AD} = 4\,\overrightarrow{oG}$

و بالتالي o و G و H مستقيمية

حل التمرين الثالث:

1- لدينا $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}$



$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}$

و بالتالي $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$

أو $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$

إذن A منتصف [MB]

-2

بما أن E هي صورة D بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BD}$ <==

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BE} = 2\,\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$

و بالتالي D هي منتصف [BE]

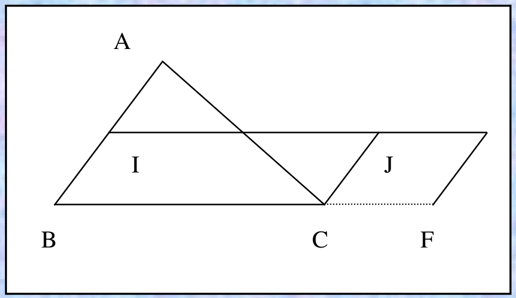
حل التمرين الرابع:

1- J صورة I بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BC}$

إذن : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IJ}$

و بالتالي يمكن إنشاء J باعتبار (IJCB) متوازي الأضلاع

2- إنشاء F بحيث $\overrightarrow{BF} = 2\,\overrightarrow{IJ}$ أنظر الشكل



3- من أجل استبيان أن صورة C بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BC}$ هي F

يجب أن نبين أن : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CF}$

من خلال السؤال (2) لدينا $\overrightarrow{BF} = 2\,\overrightarrow{IJ}$

أو $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = 2\,\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CF} = 2\,\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC}$

4- بما أن $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IJ}$ فإن IJCB متوازي الأضلاع و $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{JC}$ (1)

من جهة أخرى I هي منتصف [AB] إذن $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

و بالتالي حسب (1) نجد $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{JC}$

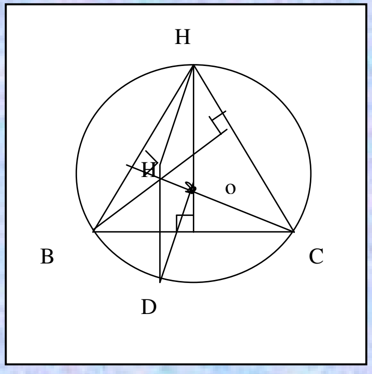
إذن الرباعي AJCI متوازي الأضلاع

استنتاج : لدينا $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$

إذن $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$ وبالتالي B , C و F نقط مستقيمية

(لأن $\overrightarrow{BC} = k\,\overrightarrow{BF}$, k عدد حقيقي غير منعدم)

حل التمرين الخامس:



1- من أجل البرهنة أن $\overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC} = \overrightarrow{oD}$

يكفي أن نبين أن الرباعي oBDC متوازي أضلاع

بما أن D مماثلة o بالنسبة للمستقيم (BC)

فإن Bo = BD و Co = CD (1)

و بما أن D و o ينتميان إلى واسط القطعة [BC]

فإن oB = oC و BD = DC (2)

و بالتالي حسب (1) و (2) نستنتج أن: oB = BD = DC = oC

إذن الرباعي oBDC جميع أضلاعه متقايسة و قطراه متعامدان إذن فهو معين

إذن هو متوازي الأضلاع و بالتالي يمكن استنتاج أن : $\overrightarrow{oD} = \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC}$

2- حسب السؤال (1) لدينا $\overrightarrow{oD} = \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC}$ إذن: $\overrightarrow{oH} = \overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oD}$

و بالتالي يمكن إنشاء H باعتبار الرباعي oAHD متوازي الأضلاع

(احترم ترتيب رؤوس متوازي الأضلاع o , A , H و D)

3- باستعمال علاقة شال في العلاقة : $\overrightarrow{oH} = \overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oD}$

$\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oD}$

بعد الإختزال نجد : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{oD}$

بما أن $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{oD}$ فإن $(AH) /\!/ (oD)$ (1)

و لدينا D مماثلة A بالنسبة للمستقيم (BC) يعني أن : $(BC) \perp (oD)$ (2)

من خلال (1) و (2) نستنتج أن (AH) عمودي على (BC)

استنتاج : H تمثل مركز تعامد المثلث ABC

يعني أن ارتفاعات المثلث ABC تتقاطع في النقطة H

4- G مركز ثقل المثلث ABC إذن :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ (خاصية في المثلثات)

$\overrightarrow{Go} + \overrightarrow{oA} + \overrightarrow{Go} + \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{Go} + \overrightarrow{oC} = \overrightarrow{0}$

إذن : $3\overrightarrow{Go} + \overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC} = \overrightarrow{0}$

أو $\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC} = 3\overrightarrow{oG}$ (3)

استنتاج :

حسب السؤال (2) لدينا : $\overrightarrow{oH} + \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC} = \overrightarrow{oH}$ (4)

إذن حسب (3) و (4) نستنتج أن $\overrightarrow{oH} = 3\overrightarrow{oG}$

و بالتالي النقط o و G و H مستقيمية

الدرس الخامس عشر

المعلم في المستوى

ملخص الدرس

– إذا كان $A(x_A , y_A)$ و $B(x_B , y_B)$ فإن :

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A , y_B - x_A)$
- $I\left(\frac{x_A + x_B}{2} , \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ منتصف $[AB]$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

التمارين :

التمرين الأول :

نعتبر $A(2 , 2)$ و $B(-1 , 3)$ و $C(0 , 3)$

1- حدد إحداثيتي كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

2- أحسب المسافات AB و BC و AC

3- حدد إحداثيتي D بحيث يكون ABCD متوازي أضلاع