N°1 دراسة الدالة BSM

باك 1974

I- نعتبر الدالة $u(x) = 4x^3 - 3x$

1- أ) ادرس تغيرات u

ب) حل في R المعادلتين $u(x) = 1$ و $u(x) = -1$

ج) حل في R المتراجحتين $u(x) \leq 1$ و $u(x) \geq -1$

II- نعتبر الدالة $f(x) = \text{Arc}\sin x - \frac{1}{3}\text{Arc}\sin(4x^3 - 3x)$

أ) حدد مجموعة تعريف f .

ب) حدد المجلات التي تكون فيها f قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$ في هذه الجلات.

ج) استنتج تعبيرا بسيطا لـ $f'(x)$

III- أرسم في نفس المعلم C_f ومنحنى الدالة $x \to \text{Arc}\sin x$

باك 1986

1) x عدد حقيقي موجبا قطعا

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ :

$$f(x) = \text{Arc}\cos\frac{1}{x} \ ; \ (x > 0)$$

أ - أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ ماذا تستنتج بالنسبة لـ f ؟

ب - أدرس تغيرات الدالة f ومثل منحناها (C) في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2) أ- اثبت أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} واعط جدول تغيراتها.

ب - أدرس قابلية اشتقاق f^{-1} على يمين الصفر

ج - أحسب $f^{-1}(x)$ وأنشيء في نفس المعلم السابق (Γ) منحنى f^{-1} .

باك 1987

لتكن دالة معرفة من R إلى R بما يلي $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$

ولتكن 'f دالتها المشتقة نرمز بـ (C) للمنحنى المثل للدالة f في مستوى منسوب لمعلم متعامد ممنظم.

I- 1 - أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2 - حدد ثلاثة أعداد حقيقية a و b و c بحيث يكون لدينا لكل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{x(x-1)(ax^2 + bx + c)}{(x^2 + 1)^2}$$

3 - أدرس تغيرات الدالة f

II- 1 - بين أن (C) يقبل مقاربا مائلا واعط معادلته الديكارتيه، حدد وضع المنحنى (C) بالنسبة لهذا المقارب

2 - حدد معادلة المماس للمنحنى (C) في النقطة ذات الافصول 2 وحدد المنحنى بالنسبة لهذا المماس.

f-III في هذا الجزء m تمثل بارامتر حقيقي

1 - عدد باستعمال المنحنى (C) وحسب قيم m عدد

حلول المعادلة : $x^3 - mx^2 + 2 - m = 0$

2 - حدد في المجال $[-\pi, \pi]$ عدد حلول المعادلة ذات المجهول α التالية : $\cos^3\alpha - m\cos^2\alpha + 2 - m = 0$

V- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1- أ) أثبت أنه لكل عدد صحيح n : $2 < u_n < 3$

ب) استنتج أن $u_n^2 < \frac{9}{10}(u_n^2 + 1)$

2- أ) تحقق من أنه لكل عدد صحيح طبيعي n يكون $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(u_n - 2)$

ب) بين باستعمال الترجع أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n - 2 < \left(\frac{9}{10}\right)^n .$$

3 - استنتج مما سبق أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها

يونيو 1988

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g، للمتغير الحقيقي x ، المعرفة بما يلي : $g(x) = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2})$

ليكن (C) المنحنى المثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم

1) حدد حيز تعريف الدالة g و بين أن النقطة I (1 , 0) مركز تماثل (C)

2) أ - ادرس تغيرات الدالة g

ب - ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

ج - انشيء المنحنى (C)

3) حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) وَ المستقيمات التي معادلتها هي : $x = 1$ وَ $x = 0$ وَ $y = 0$

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة F المعرفة بما يلي : $F(x) = \int_x^{x+2} f(t)\,dt$

حيث : F هي الدالة المعرفة بـ : $f(t) = \sqrt{t^2 - 2t + 2}$

ليكن (Γ) المنحنى المثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم

1) أ - بين أن حيز تعريف F هو R

ب - بين أن F قابلة للإشتقاق على R.

أحسب $F'(x)$

ج - بين أن F' دالة فردية ثم استنتج أن F زوجية .

2) أ - بين أن : $\left[t>1 \Rightarrow t-1<f(t)<t-1+\frac{1}{t}\right]$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

ب - استنتج أن : $(\forall x>1): \quad 2x<F(x)<2x+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$

أحسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

3) نريد تحديد قيمة $F(0)$ ، لهذا نعتبر التكامل : $I=\int_0^2 \frac{(t-1)^2}{f(t)}\,dt$

أ - احسب $F(0)-I$

ب - باستعمال التكامل بالأجزاء من أجل I ، أحسب $F(0)+I$

ج - استنتج $F(0)$

4) أ - ادرس تغيرات F

ب - ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (Γ) .

ج - أنشيء (Γ) .

دجنبر 1989

نعتبر الدوال العددية u و v و w للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي :

$$u(x)=\operatorname{Arc\,tan}(x)-x+\frac{x^3}{3}$$

$$v(x)=\operatorname{Arc\,tan}(x)-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}$$

$$w(x)=\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{Arc\,tan}(x)$$

1) أ) أنشيء جدولات لتغيرات كل من الدوال u و v و w .

ب) استنتج إشارة كل من $u(x)$ و $v(x)$ و $w(x)$ عندما يتغير x على $\mathbb{R}$.

2) نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\left.\begin{array}{ll} f(x)=\dfrac{\operatorname{Arc\,tan}(x)-x}{x} & \text{إذا كان } x\neq 0 \\ f(0)=0 & \end{array}\right\}$$

ا) بين أن الدالة f متصلة عند النقطة 0 .

ب) بين أنه لكل عدد حقيقي x موجب قطعا : $-\frac{x^2}{3} \leq f(x) \leq -\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}$

ج) استنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة 0 .

د) ادرس تغيرات الدالة f .

هـ) ارسم المنحنى المثل للدالة f .

مارس 1989 (1)

نعتبر الدالة العددية f_m للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f_m(x)=\frac{-m+\sqrt{1+x^2}}{x}$$

حيث m بارامتر حقيقي

نرمز بالرمز (C_m) للمنحنى الممثل للدالة f_m في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) • ادرس نهايات f_m عند محدات مجموعة تعريفها

• حدد قيمة m لكي تقبل الدالة f_m تمديداً بالاتصال عند 0.

2) ادرس حسب قيم البارامتر m ، تغيرات الدالة f_m (نميز بين الحالات : $m\leq 0$, $0<m<1$, $m=1$, $m>1$)

3) ارسم المنحنيات (C_{-1}) ، (C_1) ، $(C_{1/2})$ و (C_2).

4) نعتبر الدالة g العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=\operatorname{Arctan}(f_1(x)) \ , \ x\neq 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$$

a) بين أنه مهما يكن العدد الحقيقي x فإن

$$g(x)=\operatorname{Arctan}\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

b) • بين أن g تقابل من IR نحو مجال يجب تحديده.

• حدد تعبير $g^{-1}(x)$

c) استنتج تعبير بسيط لـ $g(x)$.

مارس 1989 (2)

الجزء A

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي

$$f(x)=\sqrt{x^2+4}+x-1$$

1) حدد D_f مجموعة تعريف f واحسب نهايات f عند محدات D_f

2) احسب $f'(x)$ واستنتج أن f تزايدية قطعا على IR .

3) لتكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

b) حدد نقط تقاطع (C_f) ومحوري المعلم.

اعط معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند نقطته التي أفصولها0.

c) ارسم (T) و (C_f) (نأخذ 2 cm للوحدة).

N° 3 دراسة الدالة BSM

الجزء B

لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي السالب x$(x \leq 0)$

المعرفة بما يلي :

$$g :]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \text{Arcsin}\, f(x)$$

1) ادرس تغيرات g

2) بملاحظة أن $\frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{g(x)-g(0)}{g(x)-1} \times \frac{f(x)-1}{x}$

بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{g(x)-g(0)}{x} = +\infty$

ما ذا يمكن استنتاجه بالنسبة للدالة g ؟ وبالنسبة لمنحنى g ؟

3) ارسم المنحنى الممثل للدالة g في معلم آخر غير معلم f.

يونيو 1989

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x e^{-x} + e^{-x}$

1) أ – احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب – ادرس تغيرات f على $[0, +\infty[$

أصلية

ج – حدد دالة مشتقة للدالة العددية : $(x \longrightarrow x e^{-x})$

د – باستعمال السؤال ب – بين العلاقات التالية :

(1) $(\forall x \in [0, +\infty[) \quad 0 \leq x e^{-x} \leq 1$

(2) $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f(2x) - f(x) < 0$

2) أ – تحقق من أن :

$$(\forall u \in [0, 1]) \quad 1 - u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1 - \frac{1}{2}u$$

ب – استنتج العلاقة التالية :

(3) $(\forall t \in [0, +\infty[) \quad 1 - te^{-t} \leq \frac{1}{1+te^{-t}} \leq 1 - \frac{1}{2}te^{-t}$

3) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1+te^{-t}}\,dt$$

أ – باستعمال العلاقة (3) بين العلاقة التالية :

(4) $(\forall x \in [0, +\infty[) \quad x + f(2x) \leq F(x) \leq x + \frac{1}{2}[f(2x) - f(x)]$

f(x)

ب – بين أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (F(x) - x) = 0$

ج – بين أن : $F(x) < x \quad (\forall x \in]0, +\infty[$

4) لتكن φ دالة أصلية للدالة : $\left(t \to \frac{1}{1+te^{-t}}\right)$ على $[0, +\infty[$ باستعمال أن : $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$

أ – بين أن F قابلة للإشتقاق على $[0, +\infty[$

ب – بين أن : $F'(x) = \frac{e^{2x} + 2x(e^x - 1)}{(e^{2x} + 2x)(1 + xe^{-x})}$

ج – استنتج أن : $F'(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [0, +\infty[)$

د – ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

باستعمال النتائج السابقة انشىء المنحنى (C)

5) أ – حدد الدالة الأصلية للدالة : $(x \longrightarrow f(2x) - f(x))$

ب – لتكن A مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) والمستقيمات التي معادلتها الديكارتية هي $y = 0$ و $x = 0$ و $x = 1$

باستعمال العلاقة (4) استنتج تأطيرا للمساحة A.

دجنبر 1990

نعتبر الدالتين f_1 و f_2 المعرفتين كما يلي :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[\quad f_1(x) = x + \text{Arctan}\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ f_1(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[\quad f_2(x) = x + \text{Arctan}\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ f_2(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1) برهن على أن f_1 متصلة وقابلة للاشتقاق على اليسار في 0 وعلى أن f_2 متصلة وقابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

2) ادرس تغيرات الدالتين f_1 و f_2.

3) ليكن (C_1) منحني f_1 و (C_2) منحنى f_2 بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم.

a) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنيين (C_1) و (C_2).

b) ادرس تقعر (C_1) و (C_2).

c) أنشيء (C_1) و (C_2).

4) ادرس مبيانيا عدد حلول المعادلة $\text{Arctan}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = m$ حسب قيم العدد الحقيقي m.

مارس 1990

لنعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x) = x\,\text{Arctan}\sqrt{x}$

1) أ – ادرس قابلية اشتقاق f على يمين النقطة 0 .

ب – أدرس الدالة f . (النهاية في $+\infty$ + التغيرات)

2) ليكن (C) منحنى f في معلم متعامد ممنظم

N° 4 — دراسة الدالة — BSM

أ – أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) (يمكنك وضع $t=\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\sqrt{x}$)

ب – أرسم (C).

3) أ – بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ إلى مجال يجب تحديد واستنتج أن f تقبل دالة عكسية f^{-1}.

ب – حل في $\mathbb{R}^+$، المعادلة $f(x)=f^{-1}(x)$

يونيو 1990

الجزء الأول:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{1}{\ln x}} & \text{إذا كان } x\neq 0 \text{ و } x\neq 1 \\ f(0)=1 & \text{و } f(1)=0 \end{cases}$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

1) ادرس الاتصال على اليمين ثم الاشتقاق على اليمين للدالة f عند النقطة 0.

2) أ – ادرس الاتصال على اليسار ثم الاشتقاق على اليسار للدالة f عند النقطة 1.

ب – هل الدالة f متصلة عند النقطة 1 ؟

3) ادرس تغيرات الدالة f

4) أ – بين أن المنحنى (C) يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ كمحور تماثل.

ب – حدد نقط تقاطع المنحنى (C) و المستقيم (D)

ج – ارسم المنحنى (C)

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية F، للمتغير الحقيقي x، المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بما يلي:

$$F(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt=\int_x^{x+1} e^{\frac{1}{\ln t}}\,dt$$

1) أ – بين أن: $f(x+1)\le F(x)\le f(x)$ $\quad \forall x\in]1,+\infty[$

ب – استنتج $\lim_{x\to+\infty}F(x)$

2) أ – بين أن $e^u\ge u+1$ $\quad (\forall u\in]0,+\infty[)$

ب – بين أن $F(x)-1\ge\int_x^{x+1}\frac{1}{\ln t}\,dt$ $\quad (\forall x\in]1,+\infty[)$

ج – بين أن $\ln t\le t-1$ $\quad (\forall t\in]0,+\infty[)$

ثم استنتج أن $\int_x^{x+1}\frac{1}{\ln t}\,dt\ge\ln\frac{x}{x-1}$ $\quad (\forall x\in]1,+\infty[)$

د – استنتج مما سبق $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}F(x)$

3) ادرس تغيرات الدالة F

4) ارسم المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم.

مارس 1991

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$f(x)=\ln[(\sqrt{x-1}-1)^2]$ ، حيث ln يرمز للوغاريتم النبيري.

1) حدد D حيز تعريف الدالة f ونهايات f عند محدات D.

2) أدرس اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 1 (يمكن وضع $\sqrt{x-1}=h$) اعط تأويلا مبيانيا للنتيجة.

3) ادرس تغيرات الدالة f.

4) ليكن (C) منحنى f بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم.

a) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

b) ادرس تقعر (C). (يتم تحديد إحداثيتي نقطة انعطاف (C))

c) أعط معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في نقطة ذات الأفصول 5.

d) ارسم (C) و (T) (نأخذ 1 cm كوحدة قياس).

يونيو 1991

a عدد حقيقي موجب قطعا ومختلف عن 1

1) نعتبر الدالة العددية h_a للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $h_a(x)=e^x-ax-a$

ادرس تغيرات h_a واستنتج اشارة $h_a(x)$ (ناقش حسب قيم a)

2) لتكن f_a الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $f_a(x)=\frac{xe^x}{e^x-a}$

و (C_a) منحناها في معلم متعامد ممنظم.

أ– حدد D_a، مجموعة تعريف f_a وادرس نهايات f_a عند محدات D_a.

ب– بين أن المنحنيات (C_a) تقبل نفس المستقيم المقارب المائل (Δ) وادرس وضعية (C_a) بالنسبة للمستقيم (Δ).

ج– ادرس تغيرات الدالة f_a.

د– من أجل قيم للعدد a، يتم تحديدها، تقبل الدالة f مطرافين في x_1 و x_2.

بين أن النقطتين $M_1(x_1,f_a(x_1))$ و $M_2(x_2,f_a(x_2))$ تنتميان الى مستقيم ثابت يتم تحديده بمعادلة ديكارتية.

3) نفترض أن $a=2$.

أ– $h_2(x)$ تنعدم من أجل قيمتين α و β للمتغير x. أعط تأطيرا للعددين α و β باستعمال القيم المقربة التالية:

$e^{-1}\approx0,37$; $e^{-\frac{3}{4}}\approx0,47$; $e^{\frac{3}{2}}\approx4,48$; $e^{\frac{7}{4}}\approx5,75$.

انشئ النقطتين $A_1(\alpha,f_2(\alpha))$ و $A_2(\beta,f_2(\beta))$ – ارسم المنحنى (C_2) (نأخذ 2 cm كوحدة القياس)

N°5 — دراسة الدالة — BSM

يونيو 1992 الرباط

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x} & ; x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

و (C_f) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بين أن f دالة متصلة على اليمين في النقطة $x_0=0$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0,1]$ بما يلي : $g(t)=e^{t}-1-t-\dfrac{t^2}{2}$

أ- بين أن : $t\le e^{t}-1\le t\,e \quad \forall t\in[0,1]$

استنتج أن : $t\le g''(t)\le t\,e$

ب- استنتج مما سبق أن : $\dfrac{t^2}{2}\le g'(t)\le \dfrac{t^2}{2}e \ ; \ \forall t\in[0,1]$

ثم بين أن : $\dfrac{t^3}{6}\le g'(t)\le \dfrac{t^3}{6}e \ ; \ \forall t\in[0,1]$

ج- بين أن $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{t}-1-t}{t^2}=\dfrac{1}{2}$

3) تحقق أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$ لدينا :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=4\left(\frac{e^{2x}-2x-1}{4x^2}\right)-\left(\frac{e^{x}-x-1}{x^2}\right)$$

استنتج : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

اعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة.

4) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $h(x)=2x-1+e^{-x}(1-x)$

أ- احسب $h'(x)$ و $h''(x)$.

استنتج تغيرات وإشارة h' ثم حدد تغيرات وإشارة h .

ب- تحقق أن : $f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{x^2}h(x) \quad \forall x\in]0,+\infty[$

أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

5) ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) .

6) أنشئ المنحنى (C_f) .

يونيو 1992 فاس

ln تمثل دالة اللوغاريتم النبيري . e هو أساس اللوغاريتم النبيري .

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} g(x)=1-x\ln x & \text{إذا كان } x>0 \\ g(0)=1 \end{cases}$

1) أ - تحقق أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 .

ب - أحسب نهاية g عندما يؤول x الى $+\infty$.

ج - أدرس تغيرات الدالة g وضع جدول تغيراتها .

2) أ - بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $]e^{-1},+\infty[$ بحيث $g(\alpha)=0$.

ب - إستنتج إشارة $g(x)$ على مجال تعريفها .

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[e^{-1},+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=e^{\frac{\ln(1+\ln x)}{x}} & \text{إذا كان } x>e^{-1} \\ f(e^{-1})=0 \end{cases}$

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في e^{-1} .

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

3) بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to e^{-1}\\ x>e^{-1}}}\dfrac{f(x)}{x-e^{-1}}=0$. (يمكنك استعمال المتساوية :

$$\left(\ln\left(\frac{f(x)}{x-e^{-1}}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(e\,x)}{e\,x-1}\right)+(e-1)\ln(e\,x-1)+\frac{1-e\,x}{x}\ln(e\,x-1)+1\right.$$

اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

4) لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f على المجال $]e^{-1},+\infty[$.

أ - بين أن لكل x من $]e^{-1},+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(1+\ln x)}{x^2(1+\ln x)}f(x)$

ب - حدد بدلالة α حل المعادلة $f'(x)=0$ في $]e^{-1},+\infty[$.

(α هو العدد المعرف في الجزء الأول)

ج - ضع جدول تغيرات الدالة f .

5) أدرس وضع المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=1$.

6) أنشىء المنحنى (C) . نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=5\,cm$. $e^{-1}\approx 0,4$; $e^{\alpha-1}\approx 2,2$; $f(e^{\alpha-1})\approx 1,3$ ونقبل أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف I_1 و I_2 بحيث أفصوليهما x_1 و x_2 يحققان على التوالي $e^{-1}<x_1<1$ و $x_2>e^{\alpha-1}$. (حساب x_1 و x_2 غير مطلوب)

N° 6 # دراسة الدالة BSM

يونيو 1992 البيضاء

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\ln(e^t-1)\,dt & \text{إذا كان } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) بين أن الدالة f متصلة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*_+$.

2) أ- ادرس منحى تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*_+$ بما يلي : $g(x)=\ln(e^x-1)$.

ب- استنتج أن : $x\ln(e^x-1)\le f(x)\le x\ln(e^{2x}-1)$ لكل x من $\mathbb{R}^*_+$.

ج- بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0.

د- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0.

2) احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

3) أ- بين أن : $f'(x)=\ln(e^{3x}+e^{2x}-e^x-1)$ لكل x من $\mathbb{R}^*_+$.

ب- ادرس تغيرات الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $u(x)=e^{3x}+e^{2x}-e^x-2$

ج- استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $\left]\ln\frac{6}{5},\ln\frac{5}{4}\right[$ بحيث : $u(\alpha)=0$ و $f'(\alpha)=0$.

د- ادرس تغيرات الدالة f وتحقق أن : $f(\alpha)<0$. ثم استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد β بحيث: $\alpha<\beta<\ln 2$ و $f(\beta)=0$.

4) أ- ادرس إشارة التكامل : $\displaystyle\int_x^{2x}\ln(e^t-1)\,dt$ حسب قيم العدد x من $\mathbb{R}^*_+$.

ب- مثل مبيانيا الدالة f في معلم متعامد ممنظم. (نأخذ $\ln 2=0{,}7$ و $\alpha=0{,}2$ و $f(\alpha)=-0{,}3$)

$\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$ و $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$

يونيو 1992 مراكش

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث : $f(x)=x\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

1) a) أثبت أن f دالة زوجية.

b) برهن على أنه : $e^{4x}+4xe^{2x}-1>0$; $\forall x\in\mathbb{R}^*_+$

c) اعط جدول تغيرات الدالة f ، محددا نهايات f في محدات مجموعة تعريفها.

2) ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم.

a) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C})$ محددا الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C})$ والمقارب المائل

b) ارسم $(\mathcal{C})$.

3) بين أنه $\forall x\in\mathbb{R}_+ \; , \; \dfrac{x}{2e^{2x}}\le\dfrac{x}{e^{2x}+1}\le\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

4) لتكن (u_n) و (v_n) و (w_n) المتتاليات العددية المعرفة على كما يلي :

$$u_n=\int_0^n\frac{x}{e^{2x}+1}\,dx \quad ; \quad v_n=\int_0^n\frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx \quad ; \quad w_n=\int_0^n\frac{x}{2e^{2x}}\,dx$$

a) احسب w_n بدلالة n .

b) احسب v_n بدلالة n (يمكنك وضع $e^x=t$)

c) بين أنه $w_n\le u_n\le v_n\le\frac{\pi}{4}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

d) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية ومتقاربة.

e) لتكن a_n مساحة جزء المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C})$ والمستقيمات ذات المعادلات $y=x$ و $x=0$ و $x=n$ حيث $n\in\mathbb{N}$.

بين أن $\frac{1}{4}\le\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\le\frac{\pi}{2}$

فبراير 1993 الرباط

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x-2\sqrt{\operatorname{Arctan}|x|-\frac{\pi}{4}} & ; x\le -1 \\ f(x)=\sqrt[3]{x^2(x+1)}-1 & ; x>-1 \end{cases}$$

و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ - ادرس اتصال الدالة f عند النقطة $x_0=-1$.

ب - ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0=-1$ وعند النقطة $x_1=0$.

2) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ واعط جدول تغيرات f .

3) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

4) بين أنه يوجد α وحيد من $]0,1[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

5) ارسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

6) نضع $A=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

أ - بين أن g قصور الدالة f على A تقابل من A نحو مجموعة B يجب تحديدها .

ب - اعط جدول تغيرات الدالة g^{-1} (الدالة العكسية للدالة g).

ج - حل في المجموعة B المعادلة $g^{-1}(x)=1$.

د - ارسم المنحنى (Γ) للدالة g^{-1} في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

فبراير 1993 الرباط (1)

I) 1) بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \left(1 - x^2 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4\right)$

2) لتكن h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $h(x) = \text{Arctan}\, x - x + \frac{1}{3}x^3$

أ - بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) : |h'(x)| \leq x^4$

ب - استنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) : |h(x) - h(0)| \leq |x|^5$

ج - بين أن : $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Arctan}\, x - x}{x^2} = 0$

II) لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-1, +\infty[$ بما يلي :

$$g(x) = \frac{x}{2x^2 + 2x + 1} - \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1) ادرس تغيرات الدالة g (النهايات ، $g'(x)$ ، جدول التغيرات).

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيداً غير منعدم α بحيث $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $]-1, +\infty[$.

III) لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x} & ; x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[\\ f(0) = 0 \ ; \ f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{cases}$$

و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) بين أن f متصلة على $[-1, +\infty[$.

2) أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ واستنتج تغيرات الدالة f .

3) أ - باستعمال السؤال (I) 2) ج) أحسب : $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x^2}$

إعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

ب - أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند النقطة $x_0 = -1$.

4) أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ (نأخذ $\alpha \approx -\frac{3}{4}$; $f(\alpha) \approx \frac{2}{3}$).

فبراير 1993 فاس

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = 2\,\text{Arctan}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$

(C) هو منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ - أحسب النهايتين : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{t \to 0} \frac{\text{Arctan}\, t}{t}$

ب - بين أن : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ وأعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .

2) ادرس تغيرات الدالة f .

3) أنشئ المنحنى (C) . (الوحدة : 2 cm).

4) نعتبر الدالة g قصور الدالة f على المجال $I = [1, +\infty[$.

أ - بين أن g تقابل من المجال I إلى مجال J ينبغي تحديده .

ب - لتكن g^{-1} الدالة العكسية للدالة g . احسب $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال J .

5) بين أن المعادلة : $f(x) = x$ تقبل في المجال $[1, 2]$ حلا وحيدا α . (لا يطلب تحديد قيمة α) .

6) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من N.

أ - اثبت أن : $f(2) > \frac{\pi}{3}$

ب - بين أنه لكل n من N : $1 \leq u_n \leq 2$

ج - باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أنه لكل n من N : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

د - استنتج أن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

فبراير 1993 مراكش

I) لتكن g الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث : $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$

1) a) احسب نهايات g في محدات مجموعة تعريفها .

b) بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2(x^2+1)^3}}$

c) استنتج أنه : $\forall x \in]0, 1[\ , \ 0 < g'(x) < \frac{1}{\sqrt{2}}$

d) اعط جدول تغيرات الدالة g .

2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq u_n < 1$

b) أثبت أن : $0 < |u_{n+1} - 1| < \frac{1}{\sqrt{2}}|u_n - 1|$

c) استنتج أن : u_n متقاربة وحدد نهايتها .

II) نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي حيث : $f(x) = \text{Arc}\cos g(x)$

1) a) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

b) احسب نهايات f في محدات D .

N° 8 دراسة الدالة BSM

فبراير 1994 الرباط

1) لتكن h الدالة العددية المعرفة على IR_+^* بـ : $h(x) = \frac{1}{x} - 2\,\text{Arctan}\,x$

أ- بين أن المعادلة $h(x)$ تقبل حلا وحيدا α وأن $\frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha < 1$

ب- ادرس إشارة $h(x)$.

2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR_+ بـ : $f(x) = \frac{\text{Arctan}\,x}{1+x^2}$

أ- ادرس تغيرات f (النهاية ومنحى التغير)

ب- إستنتج أن $0 \leq f(x) < \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ، لكل x من IR_+

3) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية أثبت أن :

$(\text{Arctan}\,x)^2 - (\text{Arctan}\,x_0)^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}(x - x_0)$ ؛ لكل x و x_0 من IR_+ ؛ $x > x_0$

4) ليكن x عددا حقيقيا من IR_+ . نعتبر المتتالية $(u_n(x))$ المعرفة بما يلي :

$$(n \in IN) \; ; \; u_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \left(\text{Arctan}\,\frac{x}{2^p}\right)^2$$

$$\left(\sum_{p=0}^{n} x_p = x_0 + x_1 + \dots + x_n\right)$$

أ- بين أن المتتالية $(u_n(x))$ متقاربة نضع : $\varphi(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x)$

ب- أثبت أن : $x > x_0 \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(x_0)$

ج- بين أن الدالة φ متصلة على IR_+.

فبراير 1994 سطات

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و f_a الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$\forall x \in [-a, a] \; , \; f_a(x) = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\,\text{Arcsin}\,\frac{x}{a} - \frac{\pi}{2}\right]$$

1) بين أن الدالة : $x \longrightarrow f_a(x) + \frac{\pi}{4}$ فردية واستنتج أن منحنى f_a يقبل مركز تماثل غير مرتبط بالعدد a.

2) أ- بين أن : $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\; , \; x < \text{Arcsin}\,x < x + \frac{x^3}{3}$

وأن $\forall x \in]0, 1[\; , \; \text{Arcsin}\,x = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\sqrt{1 - x^2}$

ب- بين أن : $\frac{1}{6a}(x - a)(x + 4a)\sqrt{a^2 - x^2} < f_a(x) - f_a(a) < \frac{1}{2}(x - a)\sqrt{a^2 - x^2}$ لكل x من $\left]\frac{a\sqrt{3}}{2}, a\right[$

ج- بين أن f_a قابلة للإشتقاق على $[0, a]$ وحدد $f_a'(x)$.

3) أ- ادرس تغيرات الدالة f_a.

ب- بين أنه في الحالة : $a > 1$ يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث : $f_a(\alpha) = 0$

فبراير 1994 مراكش

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا.

نعتبر الدالة f_a ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f_a(x) = a - 1 - \sqrt[3]{a^3 - x^3} & ; \; x \leq a \\ f_a(x) = 2\arctan\left(\frac{x - a}{x + a}\right) & ; \; x > a \end{cases}$$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f_a واحسب نهاياتها عند محدات D .

2) ادرس اتصال الدالة f_a على D.

3) ادرس اشتقاق f_a في $x_0 = a$ واعط تأويلا هندسيا للنتائج.

4) ادرس تغيرات الدالة f_a.

5) ادرس الفروع اللانهائية للتمثيل المبياني $(\mathscr{C}_a)$ للدالة f_a وحدد نقطة انعطافه.

6) أ- بين أن f_1 تقابل من IR الى مجال I يجب تحديده، واحسب $f_1^{-1}(x)$ لكل عنصر x من I .

ب- ارسم التمثيلين المبيانيين للدالتين f_1 و f_1^{-1} في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

فبراير 1995 فاس

نعتبر الدالة f المعرفة من R نحو R كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 1} & \text{إذا كان } |x| > 1 \\ f(x) = \text{Arc}\sin(1 - \sqrt[3]{x^2}) & \text{إذا كان } |x| \leq 1 \end{cases}$$

وليكن (C) منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a - بين أن $D_f = R$ وأنه يمكن الاقتصار على دراسة f على $D_E = [0, +\infty[$

b - ادرس اتصال f على D_E .

2) a - ادرس قابلية اشتقاق f عند النقطة $x_1 = 1$ وأول هندسيا النتيجة.

b - احسب $f'(x)$ على $D_E - \{0,1\}$ ثم حدد إشارتها.

c - اعط جدول التغيرات على D_E مع توضيح نهاية f عند $+\infty$.

3) ليكن g قصور f على $[0,1]$:

a - بين أن g تقابل من $[0,1]$ نحو مجال I يتم تحديده.

b - احسب $g^{-1}(x)$ بدلالة x .

c - تحقق أن : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = 0$

d - استنتج أن $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\text{Arc}\sin(1 - \sqrt{x^2}) - \frac{\pi}{2}}{x} = -\infty$ وأول هندسيا هذه النتيجة بالنسبة للمنحنى (C).

4) a - حدد المقارب المائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

b - انشئ (C) على R موضحا أنصاف المماسات عند مطارف f .

(نقبل أن f'' موجبة على $]0,1[$ وسالبة على $]1, +\infty[$).

N°9 | # دراسة الدالة | BSM

فبراير 1995 الرباط

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = x + \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.

I - 1) أ - تحقق أن حيز تعريف f هو المجال $[0, +\infty[$.

ب - احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2) أ - ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في O .

ب - بين أن : $f'(x) = 1 + \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}$ ، لكل x من $]0, +\infty[$.

استنتج رتابة f .

ج - بين أن 'f تناقصية قطعاً على $]0, +\infty[$.

3) أ - ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) .

ب - ارسم (C).

4) بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} من $[0, +\infty[$ على $[0, +\infty[$.

II - نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = a \ ; \ a > 0 \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \ ; n \geq 0 \end{cases}$$

1) بين أن $u_n > 0$ ، لكل n من N .

2) أثبت أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعاً.

3) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، أثبت وجود عدد حقيقي k من المجال $]0, 1[$

بحيث، $u_{n+1} < k\, u_n$ ، لكل n من N .

4) استنتج أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

فبراير 1995 مراكش

نعتبر الدالة العددية f_a المعرفة بما يلي : $f_a(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{a\sqrt{x}}{1 - a\sqrt{x}}\right)$

a عدد حقيقي موجب قطعا.

1) حدد D حيز تعريف f_a .

2) ادرس اشتقاق f_a في $x_0 = 0$.

3) أ - تحقق من أن : $\lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} \frac{\operatorname{Arccos} t}{t - 1} = -\infty$

ب - ادرس اشتقاق f_a في $\frac{1}{4a^2}$.

4) حدد f'_a وضع جدول تغيرات f_a .

5) بين أن f_a تقابل من D نحو مجال يتم تحديده. حدد f_a^{-1} .

6) أنشئ $\left(C_{f_{\frac{1}{2}}}\right)$ و $\left(C_{f^{-1}_{\frac{1}{2}}}\right)$ في نفس المعلم.

جونيو 1995 فاس

I- نعتبر الدالة g المعرفة من $[0, +\infty[$ نحو IR بما يلي: $\begin{cases} g(x) = x(\ln^2 x) - (x-1)^2 \ , \ x \neq 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

و (C) منحنى g في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) - a) - ادرس إتصال وقابلية اشتقاق g عند النقطة $x = 0$ على اليمين.

b) - ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C) .

c) - احسب $g'(x)$، وبين أن إشارة $g''(x)$ على $]0, +\infty[$ هي إشارة : $1 - x + \ln x$ ؛

d) - بين أن $1 - x + \ln x \leq 0 \ ; \ \forall x > 0$

2) - a) - اعط جدول تغيرات g [لاحظ أن $g'(1) = 0$]

b) - انشئ (C) .

3) - a) - ليكن $0 < \alpha \leq 1$ و $I(\alpha) = \int_\alpha^1 x \ln^2 x \, dx$. احسب $I(\alpha)$ بدلالة α .

b) - احسب بدلالة α ، $A(\alpha)$ المساحة الهندسية لحيز المستوى المحصور بين (C) و (Ox) والمستقيمين $x = 1$ و $x = \alpha$.

ثم تحقق أن $\lim_{\alpha \to 0^+} A(\alpha) = \frac{1}{12}$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة من $D =]0, +\infty[$ نحو IR كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \ , \ x \neq 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) - a) - احسب : $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}$

b) - نقبل أن : $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} \leq x - 1 - \ln x \leq \frac{(x-1)^2}{2} \ ; \ \forall x > 1$

بين أن f متصلة على اليمين في النقطة $x = 1$.

c) - بين أن : $\forall x > 0 : f(x) = 1 - f(\frac{1}{x})$

واستنتج أن f متصلة على اليسار في النقطة $x = 1$.

2) - a) - تحقق أن إشارة $f'(x)$ على $D - \{1\}$ هي إشارة $g(x)$.

b) - اعط جدول تغيرات f .

c) - استنتج أن : $\forall x \in [1, +\infty[\ : \ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$

3) - نعرف على المجال $I =]1, +\infty[$ الدالة F كما يلي: $F(x) = \int_x^{x^2} f(t)\, dt$

a) - تحقق أن F معرفة على I وانها قابلة للاشتقاق على I .

b) - بين أن $\forall x > 1 \ : \ F(x) \leq \frac{1}{2}(x^2 - x)$ واستنتج النهاية $\lim_{x \to 1^+} F(x)$.

c) - بين أن $\forall x > 1 \ : \ F(x) = -\ln(x+1) + \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$

d) - استنتج أن : $\lim_{x \to 1^+} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \ln 2$

N°10 # دراسة الدالة BSM

فبراير 1996 سطات

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على ℝ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x+2-\sqrt{x^2+2x} & ; \ x<-2 \\ f(x)=\text{Arc}\tan\sqrt{x+2} & ; \ x\ge -2\end{cases}$$

(C) يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j})$.

I - 1) أثبت أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0=-2$.

2) أ. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0=-2$ على اليسار.

ب. بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\frac{f(x)}{x+2}=\lim\limits_{\substack{\alpha\to0\\\alpha>0}}\frac{\alpha}{\tan^2\alpha}$ واستنتج أن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند النقطة $x_0=-2$ على اليمين.

3) اعط جدول تغيرات الدالة f.

4) أ. ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C).

ب. بين أن : $(\forall x\in]-\infty,-2[)\ f(x)-(2x+3)>0$.

ج. أنشئ (C).

5) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]-\infty,-2]$.

بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال J.

II - ليكن h قصور الدالة f على $[0,2]$ و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=h(u_n)$ لكل n من ℕ.

1) أ. بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \ \text{Arc}\tan x\le x$.

ب. بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ 0\le u_n\le 2$.

ج. بين أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعا.

2) أ. بين أن المعادلة : $x\in]0,2[\ \ h(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α.

ب. أثبت أن : $(\forall x\in[0,2])\ \ h'(x)\le\frac{1}{6\sqrt{2}}$.

ج. بين أن : $(\forall n\in N)\ \ |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{6\sqrt{2}}|u_n-\alpha|$ ثم تستنتج إن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

فبراير 1996 فاس

I - لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,\frac{\pi}{2}[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=\frac{\tan x - x}{x} & ; \ x\neq0 \\ g(0)=0\end{cases}$$

1) بين أن لكل x من $]0,\frac{\pi}{2}[$: $(1+\tan^2x)x-\tan x>0$

2) أ. بين أن لكل x من $]0,\frac{\pi}{2}[$: $g'(x)=\frac{(1+\tan^2x)x-\tan x}{x^2}$

ب. بين أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 ، ثم اعط رتابة g على المجال : $[0,\frac{\pi}{2}[$.

II - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\text{Arctan}[g(x)] & ; \ x\in]0,\frac{\pi}{2}[\\ f(0)=0 \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

(𝒞) هومنحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس اتصال f على اليمين في النقطة 0 وعلى اليسار في النقطة $\frac{\pi}{2}$.

2) أ. بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة : $t\longmapsto \tan t - t$ على المجال $[0,x]$ بحيث $0<x<\frac{\pi}{2}$ ، أثبت أن : $0\le\tan x - x\le x\tan^2x$ ، لكل x من المجال $[0,\frac{\pi}{2}[$

ب. احسب $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x - x}{x^2}$

ج. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة $x_0=0$ ، اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

3) أ. بين أن لكل t من المجال : $]0,+\infty[$: $\text{Arctan}\,t+\text{Arctan}\frac{1}{t}=\frac{\pi}{2}$ ، ثم

استنتج أن : $f(x)-\frac{\pi}{2}=-\text{Arctan}\left(\frac{x}{\tan x - x}\right)$ ، لكل x من المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$

ب. بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

4) ادرس تغيرات الدالة g واعط جدول تغيراتها.

5) أنشئ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى (𝒞). (الوحدة : 2 cm)

فبراير 1996 سطات (2)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[-1,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}\text{Arc}\sin\sqrt[3]{x+1} & ; \ -1\le x<0 \\ f(x)=\text{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) & ; \ x\ge0\end{cases}$$

(C) يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I - 1) بين أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0=0$.

2) أ. بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{f(x)}{x+1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\substack{\alpha\to0\\\alpha>0}}\frac{\alpha}{\sin^3\alpha}$. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة 1- على اليمين. أول هندسيا النتيجة المتوصل إليها.

ب. بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\substack{\beta\to0\\\beta<0}}\frac{\beta}{-1+\cos^3\beta}$. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0=0$ على اليسار. أول هندسيا النتيجة المتوصل إليها.

ج - أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0 = 0$ على اليمين.

3) أ - بين أن $(\forall x \in]-1,0[)\quad f'(x) = \dfrac{1}{6\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{(x+1)^2}}}$ و $(\forall x \in]0,+\infty[)\quad f'(x) = \dfrac{-1}{2(1+x^2)}$

ب - اعط جدول تغيرات الدالة f.

ج - انشئ المنحنى (C) . (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $-1 + \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$).

II - 1) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [0,+\infty[$.

بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده ثم أنشئ في المعلم السابق المنحنى (Γ) الممثل للدالة العكسية g^{-1} للدالة g .

2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1} = g(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ - بين أن المعادلة $g(x) = x$ ، $x \in \mathbb{R}^+$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $]0,1[$.

ب - أثبت أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

ج - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وأن نهايتها هي العدد α .

فبراير 1996 الرباط

I) لتكن الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $g(x) = \text{Arc}\tan\left(\dfrac{1}{x-1}\right) - \dfrac{x}{(x-1)^2+1}$

1) حدد D_g مجموعة تعريف الدالة g .

2) بين أن $g'(x) = \dfrac{2x-4}{[(x-1)^2+1]^2}$ لكل x من D_g ثم اعط جدول تغيرات g محددا نهاياتها عند محدات D_g .

3) بين أنه يوجد عدد حقيقي α وحيد من المجال $]1,21 ; 1,4[$ بحيث $g(\alpha) = 0$

(نعطي $\text{Arc}\tan\dfrac{5}{2} \approx 1,19$ و $\text{Arc}\tan 5 \approx 1,37$)

4) استنتج إشارة $g(x)$ على D_g .

II) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x) = x.\text{Arc}\tan\dfrac{1}{x-1}$

وليكن (C) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ - احسب نهايات f عند محدات D_f ، مجموعة تعريف الدالة f .

ب - بين أن f قابلة للإشتقاق في كل نقطة x من D_f وأحسب $f'(x)$ ثم اعط جدول تغيرات f دون حساب $f(\alpha)$.

2) أ - بين أن $\text{Arc}\tan|x| + \text{Arc}\tan\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{\pi}{2}$ ، لكل x من $\mathbb{R}^*$.

ب - ليكن f_1 التمديد بالاتصال للدالة f على اليمين في 1 و f_2 التمديد بالإتصال للدالة على اليسار في 1 . بين أن f_1 قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 وأن f_2 قابلة للإشتقاق على اليسار في 1 .

3) أنشئ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نصف مماس (Cf_1) ، منحنى f_1 ، في النقطة $A(1, f_1(1))$ ونصف مماس (Cf_2) منحنى f_2 ، في النقطة $B(1, f_2(1))$ ثم (C) (نأخذ $f(\alpha) \approx 1,6$).

فبراير 1996 الرباط (2)

نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f_n(x) = \text{Arc}\cos\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

I - 1) أ - بين أن f_n معرفة على $\mathbb{R}$.

ب - ادرس زوجية f_n ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

أ - بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $f_n(x) = \pi - 2\,\text{Arc}\tan|x^n|$.

ب - بين أن الدالة f_n قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ وأن : $f'_n(x) = \dfrac{-2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

ج - ادرس قابلية اشتقاق f_n على اليمين في الصفر (هناك حالتان : $n = 1$ و $n \neq 1$) .

د - اعط جدول تغيرات f_n على $\mathbb{R}$ في كلتا الحالتين : $n = 1$ و $n \neq 1$.

3) ليكن g_n قصور الدالة f_n على $\mathbb{R}^+$. بين أن g_n تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال I يجب تحديده ثم حدد $g_n^{-1}(x)$ بدلالة $\cotan\dfrac{x}{2}$.

II - نأخذ في كل ما يلي $n = 1$.

1) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1,2[$ بحيث $f_1(\alpha) = \alpha$.

2) أنشئ في نفس المعلم المتعامد المنظم منحنى f_1 على $\mathbb{R}$ ومنحنى g_1^{-1} .

3) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$

و نضع $v_n = u_{2n}$; $w_n = u_{2n+1}$.

أ - بين أن : $0 \leq u_n \leq \pi$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب - بين أن (v_n) تزايدية و أن (w_n) تناقصية .

ج - استنتج أن (v_n) و (w_n) متقاربتان.

فبراير 1996 مراكش

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{2} + \text{Arc}\tan\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right) \ ; & x \in]-\infty, 1[\\ g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} \ ; & x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

وليكن C_g منحنى الدالة g في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) بين أن الدالة g متصلة على $\mathbb{R}$.

2) أدرس قابلية اشتقاق g عند $x_0 = 1$ على اليسار وعند $x_0 = 1$ على اليمين.

3) أعط جدول تغيرات الدالة g .

4) أ - أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى C_g وحدد وضعية C_g بالنسبة لمقاربه المائل.

ب - أنشئ C_g .

5) بين أن h قصور الدالة g على المجال $]-\infty, 0]$ تقابل من $]-\infty, 0]$ نحو مجال I يجب تحديده ثم احسب $h^{-1}(x)$ لكل x من I (h^{-1} هي الدالة العكسية لـ h).

N° 12   **دراسة الدالة**   BSM

يونيو 1996 سطات

لة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{x^2}-1}{x} & ; x<0 \\ f(0)=0 & \\ f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2} & ; x>0 \end{cases}$$

(C) يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I - 1) أ ـ أثبت أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0=0$ على اليسار .

ب ـ ادرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=0$ على اليمين .

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0=0$ على اليسار .

II - 1) أ ـ ثبت أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*-})\ (2x^2-1)e^{x^2}+1>0$ (يمكن دراسة تغيرات الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}^{*-}$ بما يلي : $(\varphi(x)=(2x^2-1)e^{x^2}+1$.

ب ـ ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty,0[$.

2) أ ـ بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})\quad \dfrac{x}{x+1}<\ln(1+x)$ (يمكن اعتبار الدالة $t\longmapsto \ln(1+t)$ وتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية)

ب ـ ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

3) أ ـ اعط جدول تغيرات الدالة f .

ب ـ ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C) .

ج ـ أنشيء المنحنى (C) .

4) ليكن λ عددا حقيقيا من المجال $]1,+\infty[$.

أ ـ احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للجزء المستوي المحصور بالمنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=\lambda$.

ب ـ احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

يونيو 1996 الرباط

A - 1) تحقق من أن لكل x من $[0,+\infty[$: $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt = x-\ln(1+x)$ ثم استنتج أن : $x-\ln(1+x)\geq 0$ لكل $x\geq 0$.

2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\sqrt{x-\ln(1+x)}$ ؛ وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\,cm$.

احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ واستنتج الفرع اللانهائي للمنجنى (C_f) .

3) نضع لكل x من $[0,+\infty[$: $u(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$.

أ ـ بين أن : $0\leq u'(x)\leq x^2$ ثم استنتج أن $0\leq u(x)\leq\dfrac{x^3}{3}$ على المجال $[0,+\infty[$.

ب ـ استنتج أن $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\leq x-\ln(1+x)\leq\dfrac{x^2}{2}$ لكل x من $[0,+\infty[$ ثم احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

ج ـ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر .

4) احسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$ واعط جدول تغيرات الدالة f ثم أنشيء (C_f) .

5) أ ـ احسب باستعمال المكاملة بالأجزاء : $I=\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} x\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}}\,dx$

ب ـ باستعمال (3 ـ ب) ، بين أن $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}\,cm^2\leq A(\Delta)\leq\dfrac{9\sqrt{2}}{16}\,cm^2$ حيث $A(\Delta)$ هي مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C_f) و $(O,\vec{i})$ والمستقيم ذي المعادلة $x=\dfrac{3}{2}$. و (0.5)

B ـ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & ; x>0 \\ g(0)=0 & \end{cases}$$

(حساب $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ غير مطلوب) .

1) أ ـ باستعمال مبرهنة المتوسط، بين أن : $f(x)-g(x)\geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

ب ـ استنتج أن g متصلة على اليمين في الصفر وأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$.

2) تحقق من أن $g'(x)=\dfrac{f(x)-g(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ واستنتج رتابة g .

يونيو 1996 فاس

I ـ نعتبر الدالة g المعرفة على $I=[1,2[\cup]2,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x-2)}-\ln|x(x-2)|$

1) ادرس تغيرات الدالة g (النهايات، الدالة المشتقة وجدول التغيرات) .

2) أ ـ بين أن في المجال $]2,+\infty[$ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α (حساب α غير مطلوب) .

ب ـ استنتج إشارة $g(x)$ على I .

II ـ لتكن f الدالة المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{0,2\}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{\ln|x(x-2)|}{(x-1)^2}$ إذا كان $x\neq1$ و $f(1)=-1$.

$(\mathscr{C})$ هو منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $x=1$ ، محور تماثل للمنحنى $(\mathscr{C})$.

2) أ ـ احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.

ب ـ بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة $x_0=1$.

3) أ ـ تحقق من أن : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{\ln[1-(x-1)^2]+(x-1)^2}{(x-1)^3}$ لكل x من $]1,\dfrac{3}{2}[$.

N°13 دراسة الدالة BSM

ب ـ بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في النقطة $x_0 = 1$ (يمكن استعمال النتيجة التالية :

$$-\frac{t^2}{2} - t^3 \le \ln(1-t) + t \le -\frac{t^2}{2}$$ ، لكل t من $\left]0, \frac{1}{4}\right[$)

4) أ ـ بين أن لكل x من $I - \{1\}$: $f'(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \cdot g(x)$

ب ـ تحقق من أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f على D .

5) أ ـ حدد نقطتي تقاطع المنحنى $(\mathscr{C})$ ومحور الأفاصيل .

ب ـ أنشىء المنحنى $(\mathscr{C})$ (الوحدة : 2 cm) . نأخذ $\alpha \approx 3{,}14$ و $f(\alpha) \approx 0{,}28$.

أ ـ احسب التكامل التالي : $J = \int_3^4 \frac{2}{x(x-2)}\,dx$. (لاحظ أن : $\frac{2}{x(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}$)

ب ـ باستعمال مكاملة بالأجزاء، احسب ب cm^2 مساحة الحيز المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x = 3$ و $x = 4$.

يونيو 1996 مراكش

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x e^{\frac{1}{x}} & ; x < 0 \\ f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

وليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ وبين أن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2) بين أن الدالة f متصلة وقابلة للاشتقاق في النقطة $x_0 = 0$.

3) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$.

ادرس منحى تغيرات الدالة g على $]0, +\infty[$ واستنتج إشارة $g(x)$.

4) اعط جدول تغيرات الدالة f .

5) أ ـ بين أن المستقيم المعرف بالمعادلة الديكارتية $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ب ـ نقبل أن المستقيم الذي معادلته $y = x - \frac{1}{2}$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$. أنشىء (C) .

يوليوز 1996

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ من أجل $x \in [0, +\infty[$

A - 1) ادرس تغيرات الدالة f_n .

2) ليكن (C_n) منحنى f_n . ادرس وضع (C_n) بالنسبة لـ (C_{n-1}) ، حيث $n \ge 2$.

بين أن $A_n(n, f(n))$ تنتمي إلى (C_{n-1}) .

3) انشىء (C_1) و (C_2) و (C_3) مع تحديد المماسات لهذه المنحنيات في النقطة O اصل المعلم . $(O, \vec{i}, \vec{j})$. ($\|\vec{i}\| = 2$ و $\|\vec{j}\| = 10$)

B - نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ بحيث $u_n = f_n(n)$.

1) a ـ بين أن (u_n) تناقصية .

b ـ هل (u_n) متقاربة ؟

2) a ـ ادرس تغيرات الدالة $g : x \longrightarrow \ln(1+t) \le 1 - \frac{t^2}{4}$ على $[0, 1]$

استنتج أن $\forall t \in [0, 1] \quad \ln(1+t) \le 1 - \frac{t^2}{4}$

b ـ استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \le e^{1 - \frac{1}{4n}}$

3) a ـ بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \le e^{-\frac{1}{4n}}$

b ـ استنتج أن $u_n \le e^{-1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1\right)}$

4) a ـ بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ n \ge 2, \ \int_1^n \frac{dt}{t} \le 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$

b ـ استنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ n \ge 2, \ u_n \le e^{-1 - \frac{1}{4}n}$

C ـ نضع $I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!}$ ، حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و $a \in \mathbb{R}_+$.

1) احسب $I_1(a)$.

2) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall t > 0 \quad 0 \le f_n(t) \le \frac{t^n}{n!}$

استنتج تأطيرا للعدد $I_n(a)$.

3) a ـ بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$

b ـ استنتج تأطيرا جديدا للعدد $I_n(a)$ ثم $\lim_{n \to +\infty} I_n(a)$

4) a ـ حدد علاقة بين $I_n(a)$ و $I_{n-1}(a)$ ، حيث $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$

b ـ استنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ n \ge 2, \ I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right)$

هل هذه المتساوية تبقى صالحة إذا كان $n = 1$ ؟

5) بين أن $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad e^a = \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right)$

N°14 دراسة الدالة BSM

فبراير 1997 فاس

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\pi x}{2 \operatorname{Arctan} x} \ ; \ x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$(\mathcal{C})$ هو منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم .

1) أ - تحقق من أن f دالة زوجية .

ب - احسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) بين أن : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x} = 1$ ثم استنتج أن الدالة f متصلة في $x_0 = 0$.

3) أ - بين أن لكل $x > 0$ ولكل c من $]0, x[$: $\dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{1}{1+c^2} < 1$.

ب - بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t \to \operatorname{Arctan} t$ في مجال $[0, x]$ بحيث $x > 0$ ، أثبت أن :

$$\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{Arctan} x < x$$

ج - بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_0 = 0$، ثم اعط التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها.

4) أ - احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.

ب - ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*_+$ (يمكن استعمال نتيجة السؤال 3) ب -).

ج - اعط ج ل تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

5) أ - بين أن لكل $x > 0$: $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

ب - ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$.

6) أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$ (الوحدة : 2 cm).

فبراير 1997 الرباط

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} \ ; \ x \geq 2 \text{ إذا كان } \\ f(x) = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} \ ; \ x < 2 \text{ إذا كان } \end{cases}$$

وليكن $(\mathcal{C})$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A - 1) حدد $\mathcal{D}_f$ مجموعة تعريف الدالة f.

2) ادرس اتصال f في النقطة $x_0 = 2$.

3) احسب نهايات f عند محدات $\mathcal{D}_f$، وادرس الفروع اللانهائية لـ $(\mathcal{C})$.

4) ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين وعلى اليسار في $x_0 = 2$.

5) احسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]-\infty, 2[$ ولكل x من المجال $]2, +\infty[$ ثم اعط جدول تغيرات f.

6) ارسم $(\mathcal{C})$. $(f(0) \approx 0{,}4)$.

7) ليكن g قصور f على المجال $]-\infty, 2[$ بين أن g تقابل من $]-\infty, 2[$ نحو مجال يجب تحديده. حدد g^{-1} ثم مثل منحناها في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

B - 1) أ - بين أنه يوجد عدد حقيقي k من المجال $]0, 1[$ بحيث $0 < g'(x) < k$ لكل x من المجال $]0, 1[$، ثم استنتج رتابة الدالة h على المجال $]0, 1[$ حيث : $h(x) = g(x) - x$.

ب - بين أنه يوجد عدد وحيد α من $]0, 1[$ بحيث $g(\alpha) = \alpha$.

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{4} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

أ - بين أن : $0 < u_n < 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب - بين أن : $|u_{n+1} - \alpha| < k\,|u_n - \alpha|$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ج - استنتج أن (u_n) متقاربة وأن نهايتها هي α .

فبراير 1997 مراكش

I . نعتبر الدالة العددية g_m المعرفة على المجال $]1, +\infty[$ بما يلي : $g_m(x) = m\sqrt{x-1} - 1$ حيث m بارامتر حقيقي غير منعدم.

1) ادرس حسب قيم m تغيرات الدالة g_m.

2) حل في $\mathbb{R}$ حسب قيم m المعادلة : $g_m(x) = 1$

II . نفترض فيما تبقى من الأسئلة أن : $m \geq 2$.

لتكن f_m الدالة العددية للمتغير الحقيقي x بحيث :

$$\begin{cases} f_m(x) = \operatorname{Arc\,sin}\left(\dfrac{1}{g_m(x)}\right) ; x \geq 1 + \left(\dfrac{2}{m}\right)^3 \\ f_m(x) = \dfrac{\pi}{2} + \sqrt{2-x} \quad ; x < 1 + \left(\dfrac{2}{m}\right)^3 \end{cases}$$

1) أ - تحقق أن الدالة f_m معرفة على $\mathbb{R}$.

ب - ادرس حسب قيم m اتصال الدالة f_m في : $x_0 = 1 + \left(\dfrac{2}{m}\right)^3$.

2) حدد منحى تغيرات الدالة f_m.

3) نرمز بـ (C_2) لمنحنى الدالة f_2 في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

أ - احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{f_2(x) - \frac{\pi}{2}}{x - 2}$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{f_2(x) - \frac{\pi}{2}}{x - 2}$

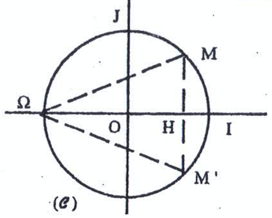
وأول النتيجتين مبيانيا.

ب - اعط جدول تغيرات الدالة f_2.

ج - حدد الفرعين اللانهائين لـ (C_2) وأنشيء (C_2).

N°15 دراسة الدالة BSM

فبراير 1997 سطات



I - نعتبر الدائرة المثلثية $(\mathcal{C})$ و $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ معلما متعامدا ممنظما مرتبطا بها.
M نقطة تتغير على القوس (IJ) و M' مماثلتها بالنسبة لمحور الأفاصيل
و H المسقط العمودي للنقطة M على محور الأفاصيل.
لتكن النقطة Ω مماثلة I بالنسبة للنقطة O (انظر الشكل).

1) نضع $OH = x$
بين أن مساحة المثلث $\Omega MM'$ هي : $S(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$

2) حدد وضع النقطة M الذي تكون من أجله مساحة المثلث $\Omega MM'$ قصوية وحدد طبيعة المثلث $\Omega MM'$ في هذه الحالة.

II - لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} & ; 0 \le x \le 1 \\ f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x} & ; x > 1 \end{cases}$$

1) أ - أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_1 = 1$.
ب - ادرس قابلية اشتقاق f عند النقطة $x_1 = 1$ على اليمين وعند النقطة $x_1 = 1$ على اليسار.
ج - ادرس قابلية اشتقاق f عند النقطة $x_0 = 0$ على اليمين.

2) اعط جدول تغيرات الدالة f.

3) $(\mathcal{C}_f)$ يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة : 2 cm)
أ - بين أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 0$ واعط تأويلا مبيانيا لهذه النتيجة.
ب - أثبت أن المعادلة : $f(x) = x$; $x \in [0, 1]$ تقبل حلا وحيدا α و أن $\frac{4}{5} < \alpha < 1$
ج - أنشىء المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

فبراير 1997 البيضاء

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1} & x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x - \operatorname{Arctan} x} & x \ge 0 \end{cases}$$

1) ادرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 0$.

2) بين أن : $\operatorname{Arctan} x \le x$ لكل x من $\mathbb{R}^+$.

3) أ - بين أن : $\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \le x - \operatorname{Arctan} x \le \frac{x^3}{3}$ لكل x من $\mathbb{R}^+$
ب - احسب : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3}$
ج - ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0 = 0$.

4) أ - ادرس تغيرات الدالة f.
ب - ليكن $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C})$.
ج - أنشىء المنحنى $(\mathcal{C})$ (نأخذ $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \approx 0{,}7$).

5) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty, 0[$.
بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

6) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n - \operatorname{Arctan} u_n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

أ - بين أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعا وأستنتج أنها متقاربة.
ب - بين أن $0 \le u_{n+1} \le \sqrt{\frac{1}{3}}$ لكل n من $\mathbb{N}$ واستنتج نهاية (u_n).

يونيو 1997 الرباط

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x - 1}$.

1) أ - ادرس تغيرات الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $h(x) = e^x - x - 1$ (حساب النهايات غير مطلوب).
ب - استنتج أن h تنعدم في نقطة واحدة ثم حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2) أحسب نهايات f عند محدات D_f.

3) أ - أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.
ب - ادرس منحى تغير الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $k(x) = -xe^x + e^x - 1$ واستنتج إشارتها على $\mathbb{R}$ ثم اعط جدول تغيرات الدالة f.

4) ارسم منحنى f : $(\mathcal{C})$ في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 1 cm).

5) أ - أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المحصور بين $(\mathcal{C})$، المستقيم ذي المعادلة $y = 1$ والمستقيمين ذوي المعادلتين : $x = 1$ و $x = \lambda$ حيث λ عدد حقيقي أكبر قطعا من 1.
ب - أحسب $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

يونيو 1997 مراكش

لنكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^* - \{-1\}$ بما يلي : $f(x) = \ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)$

1) أ - بين أن : $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ لكل x من $\mathbb{R}^* - \{-1\}$
ب - اعط جدول تغيرات الدالة f (مع تحديد النهايات).

2) أ - حدد الفروع اللانهائية للمنحني (C_f) ثم أنشئ (C_f). (نقبل أن $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ نقطة انعطاف لـ (C_f)).
ب - احسب مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) ومحور الأفاصيل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $x = 1$ و $x = 2$.

N°16 دراسة الدالة BSM

يونيو 1997 فاس

1) أ - بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة : $t \longrightarrow \ln(1+t)$ في المجال $[0, u]$ بحيث $u > 0$ ،

بين أن : $\frac{u}{1+u} < \ln(1+u) < u$

ب - استنتج أن : $\frac{x^2}{1+x^2} < \ln(1+x^2) < x^2$ ، لكل $x \neq 0$: (2)

$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}$

2) أحسب بدلالة x بحيث $x > 1$ ، التكاملين التاليين :

$I(x) = \int_1^x \frac{1}{t(t^2+1)} dt$ ، $J(x) = \int_1^x \frac{\ln(t^2)}{t} dt$ (بالنسبة لحساب $I(x)$ لاحظ أن لكل t من $\mathbb{R}^*$: $\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}$).

II) نعتبر الدالة العددية f على $\mathbb{R}$ بما يلي : $x \neq 0$ ، $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1) بين أن f متصلة في النقطة $x_0 = 0$.

2) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

باستعمال المتفاوتة (2) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^{*+}$:

$$(3) : \quad \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \leq F(x) \leq \frac{1}{2}x^2$$

ثم استنتج أن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{F(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

III) لتكن φ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} \varphi(x) = \frac{F(x)}{x^2} \quad ; \quad x \neq 0 \\ \varphi(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

1) بين أن الدالة φ زوجية (يمكن وضع $u = -t$ بالنسبة لـ : $F(-x)$)

2) أ - تحقق من أن : $\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \frac{2F(x) - x^2}{2x^3}$ ، لكل $x > 0$.

ب - باستعمال المتفاوتتين (2) و (3) بين أن الدالة φ قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر وأن : $\varphi_d'(0) = 0$.

3) أ - بين أن : $\varphi'(x) = \frac{\ln(1+x^2) - 2F(x)}{x^3}$ لكل $x > 0$.

ب - استنتج أن لكل $x > 0$: $\varphi'(x) < 0$.

4) أ - بين أن لكل $x > 1$: $\int_1^x \frac{\ln(1+t^2) - \ln(t^2)}{t} dt = F(x) - F(1) - (\ln x)^2$

ب - باستعمال المتفاوتة (2)، بين أن لكل $x > 1$:

$$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \ln(\sqrt{2}) \leq \int_1^x \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

ج - استنتج أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$

5) أ - ضع جدول تغيرات الدالة φ على $\mathbb{R}$.

ب - أنشئ المنحنى الممثل للدالة φ في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة : 4 cm)

يوليوز 1997 فاس

ln يمثل دالة اللوغاريتم النبيري و e أساسها

A) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = -1 + x - \ln x$

1) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $]0, +\infty[$.

2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0, +\infty[$.

B) لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x - \ln x} & \text{إذا كان } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

ليكن $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) حدد حيز تعريف الدالة f (نرمز له بـ D)

2) بين أن f متصلة على اليمين في النقطة 0.

3) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ واستنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

4) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 واعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

5) لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f على المجال $]0, +\infty[$:

أ- احسب $f'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$.

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f.

6) ادرس وضع المنحنى $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم Δ الذي معادلته $y = 1$.

7) أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نأخذ $\|\vec{i}\| = 1\text{ cm}$ و $e = 2{,}7$. (المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل نقطتي انعطاف أفصوليهما x_1 و x_2 يحققان على التوالي : $0 < x_1 < e$ و $e < x_2$

C) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

1) أ- حدد منحى تغير الدالة F على المجال $]0, +\infty[$.

ب- استنتج إشارة $F(x)$ على المجال $]0, +\infty[$.

2) أ- بين أن لكل x من $]0, 1[$: $f(x) < x$

N°17 — دراسة الدالة — BSM

ب- استنتج أن لكل x من $]0, 1]$: $\frac{x^2-1}{2} \le F(x) \le 0$

3) أ- بين أن لكل x من $[1, +\infty[$: $\frac{x}{x - \ln x} \le 1 + \ln x$

ب- استنتج أن لكل x من $[1, +\infty[$: $F(x) \le x \ln x$

4) $t \in [1, +\infty[$ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in N}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$; $u_n = 1 + \frac{\ln t}{t} + \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\ln t}{t}\right)^n$

$(n > 0)$. بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in N}$ متقاربة وحدد نهايتها.

5) أ- لكل x من $[1, +\infty[$ احسب $\int_1^x \left(1 + \frac{\ln t}{t}\right) dt$

ب- استنتج أن لكل x من $[1, +\infty[$: $x - 1 + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \le F(x)$

يونيو 1997 سطات

1) لكل x من R^+ نضع : $I(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt$ و $J(x) = \int_0^x \frac{-t^3}{1+t} dt$

أ. احسب $I(x)$ و $J(x)$.

ب. استنتج أن : $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ $(\forall x \in R^+)$

2) لنكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على R^{+*} بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x \ln x}{x - 1} \ ; \quad x \in R^{+*} - \{1\} \\ g(1) = 1 \end{cases}$$

بين أن g دالة قابلة للإشتقاق عند النقطة $x_0 = 1$ على اليمين (يمكنك وضع $x = 1 + h$).

3) أ. بين أن : $\ln x + 1 - x < 0$ $(\forall x \in R^{+*} - \{1\})$

ب. بين أن : $g\left(\frac{1}{x}\right) g(x) < 1$ $(\forall x \in R^{+*} - \{1\})$

يونيو 1997 سطات (2)

I - ليكن m و p عددين حقيقيين

نعتبر $\mathcal{F}$ مجموعة الدوال العددية بحيث : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f_{(m,p)}(x) = (mx + p) e^{2x}$.

1) بين أن $\mathcal{F}$ مزودا بعملية جمع الدوال العددية وبالضرب في عدد حقيقي فضاء متجهي حقيقي.

2) بين أن الأسرة $B(f_{(1,0)} ; f_{(0,1)})$ أساس في $\mathcal{F}$.

II - لتكن المعادلة التفاضلية (E) التالية : $(E) : y' - 2y = e^{2x}$.

1) حدد λ من $\mathbb{R}$ لكي تكون الدالة h بحيث $h(x) = \lambda x e^{2x}$ (لكل x من $\mathbb{R}$) حلا للمعادلة (E).

2) استنتج حلول المعادلة (E).

III - نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = (x-1) e^{2x}$.

1) أعط جدول تغيرات الدالة f.

2) استنتج أن : $\left(\frac{1}{2} < \alpha < \beta \Rightarrow \alpha e^{2\alpha} - \beta e^{2\beta} < e^{2\alpha} - e^{2\beta}\right)$ $(\forall (\alpha, \beta) \in R^2)$.

3) (C) يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

أ. ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C).

ب. ادرس تقعر (C) ثم أنشئ (C).

ج. احسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل ومحور الأراتيب والمستقيم المعرف بالمعادلة $x = 1$.

يونيو 1998 الرباط

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$ اذا كان $x > 0$ ، و $f(0) = 0$

1°- أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0.

ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0.

ج) احسب النهاية : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2°- أ) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0, +\infty[$.

ب) ارسم منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (تحديد نقطة الانعطاف غير مطلوب)

3°- بين أن الدالة f تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}_+$.

الجزء الثاني : نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $(\forall x > 0)$ $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$

1°- احسب النهاية : $\lim_{x \to 0^+} F(x)$

2°- نضع : $(\forall x \ge 1)$ $I(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t} f(t) dt$

أ) بين أن : $\frac{\ln 2}{2x - \ln 2x} \le I(x) \le \frac{\ln 2}{x - \ln x}$ $(\forall x \ge 1)$. ثم استنتج النهاية : $\lim_{x \to +\infty} I(x)$

ب) بين أن : $F(x) - I(x) = \ln\left(1 + \frac{x - \ln 2}{x - \ln x}\right)$ $(\forall x \ge 1)$. ثم استنتج النهاية : $\lim_{x \to +\infty} F(x)$

3°- لتكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز الهندسي المحصور بين منحنى الدالة f والمستقيمات المعرفة على التوالي بالمعادلات: $x = \alpha$ و $x = 2\alpha$ و $y = 0$. حدد قيمة العدد α بحيث تكون المساحة $A(\alpha)$ قصوية .

N°18 **دراسة الدالة** BSM

فبراير 1999 الرباط

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على IR^+ بما يلي : $g(x) = (x+1)\sqrt{x} - 1$.

1) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في IR^+ وأن $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$.

2) حدد إشارة $g(x)$.

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = x - \text{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

1) بين ان حيز تعريف الدالة f هو IR^+.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر (يمكن وضع $t = \text{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$)

3) أ) بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)\sqrt{x}}$ $\quad (\forall x \in]0,+\infty[)$.

ب) احسب نهاية f عند $+\infty$ ثم اعط جدول تغيرات الدالة f.

4) أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]0,+\infty[$ وأن $\frac{7}{4} < \beta < 2$ (نأخذ $\text{Arccos}\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 1{,}91$ و $\text{Arccos}\left(\frac{-3}{11}\right) \approx 1{,}85$).

ب) استنتج إشارة $f(x)$ على IR^+.

5) ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ) ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C).

ب) انشئ المنحنى (C) (نأخذ $f(\alpha) \approx -0{,}7$).

6) نضع $h(x) = \text{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ لكل x من المجال $[0,+\infty[$.

نعتبر المتتالية : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = h(u_n)\ ;\ n \in IN \end{cases}$.

أ) بين أن : $(\forall n \in IN) \quad \beta \le u_n \le 2$.

ب) ادرس رتابة المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

ج) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أنه يوجد عدد حقيقي k من المجال $]0;1[$ بحيث : $|u_{n+1} - \beta| \le k|u_n - \beta|$ لكل n من IN.

د) حدد نهاية المتتالية (u_n).

يونيو 1999 الرباط

1) لتكن φ الدالة العددية المعرفة على المجموعة $D =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ بما يلي :

$$\varphi(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$$

ادرس تغيرات الدالة φ (النهاية في 0 على اليمين والنهاية في 1- على اليسارغير مطلوبتين) . واستنتج أن : $\forall x \in D: \quad \varphi(x) > 0$.

2) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجموعة $D\cup\{0\}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right);\ x \ne 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

أ) ادرس اتصال وقابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في $x_0 = 0$.

ب) احسب نهايات الدالة f عند محدات المجموعة $D\cup\{0\}$.

ج) احسب $f'(x)$ لكل x من D ثم أنشيء جدول تغيرات الدالة f.

د) أنشيء (C) ، التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) لتكن g الدالة المعرفة بما يلي : $g(x) = f(-1-x)$.

أ) حدد حيز تعريف الدالة g.

ب) ليكن (C') التمثيل المبياني للدالة g في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

بين أن (C) و (C') متماثلان بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $x = -\frac{1}{2}$.

ج) أنشيء بلون مغاير المنحنى (C') في المعلم السابق $(O,\vec{i},\vec{j})$.

د) بين مبيانيا أنه : $f(n) < 1 < g(n) \quad (\forall n \in IN^*)$.

هـ) استنتج أنه : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (\forall n \in IN^*)$.

يونيو 1999 فاس

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x^2+2x-2}{2x}\right)e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ f(x) = \frac{x\ln x}{x-1} & x > 0 \text{ و } x \ne 1 \\ f(0) = 0 \text{ و } f(1) = 1 \end{cases}$$

ليكن $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن f متصلة في 0 و متصلة في 1.

2) أ. احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

N°19 # دراسة الدالة BSM

ب - بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (𝒞) بجوار $-\infty$.

ج - حدد الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$.

3) ادرس الاشتقاق على اليمين والاشتقاق على اليسار للدالة f في 0.

نقبل أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

4) لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f بين أن:

$$\forall x\in]-\infty,0[: f'(x)=\frac{(x+1)(x^2-2x+2)e^{\frac{1}{x}}}{2x^3}$$

$$\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[: f'(x)=\frac{-1+x-\ln x}{(x-1)^2}$$

5) بين أن: $f'(x)>0$ لكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

(يمكنك دراسة تغيرات الدالة: $g: x\longmapsto x-\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$).

6) ضع جدول تغيرات الدالة f. (نقبل أن: $f'(1)=\frac{1}{2}$)

7) أنشئ المنحنى (𝒞). نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\,cm$.

نقبل أن للمنحنى (𝒞) نقطة انعطاف أفصولها α يحقق $-1<\alpha<0$.

جونيو 1999 سطات

لتكن f دالة عددية معرفة وقابلة للاشتقاق على ℝ وتحقق ما يلي:

$$(\forall x\in\mathbb{R})\ f'(x)-f(x)=2\int_0^x f(t)\,dt \quad \text{و} \quad f(0)=f'(0)=1$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f بالنسبة لمعلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على ℝ.

ب. بين أن الدالة f حل للمعادلة التفاضلية: $(E):\ y''-y'-2y=0$

2) أ. حل المعادلة التفاضلية (E).

ب. استنتج أن: $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)=\frac{1}{3}(2e^{2x}+e^{-x})$

3) أ. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

ب. ادرس تغيرات الدالة f على ℝ.

ج. أنشئ المنحنى (C). (نأخذ: $\|\vec{i}\|=2\,cm$ ، $\|\vec{j}\|=3\,cm$ ، $\ln 2=0,7$ ، $(\sqrt[3]{2})^{-1}=0,8$)

4) احسب بالوحدة "cm^2" مساحة الحيز المسطح المحصور بين المنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها على التوالي: "$y=0$" و "$x=0$" و "$x=1$".

---

5) لكل عدد صحيح طبيعي n نضع: $u_n=\int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt}\,dt$

أ. بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0\le u_n\le f(1)\int_0^1\frac{dt}{1+nt}$

ب. استنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

6) لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $W_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{4e^{3\frac{k}{n}}-1}{e^{3\frac{k}{n}}+1}$

أ. بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ W_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{f'\left(\frac{k}{n}\right)}{f\left(\frac{k}{n}\right)}$

ب. استنتج أن المتتالية $(W_n)_{n\ge1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها.

فبراير 2000 الرباط

نعتبر الدالة العددية f_α للمتغير الحقيقي x بحيث: $f_\alpha(x)=x+\operatorname{Arccos}\left(\frac{\alpha}{x}\right)$ ، α بارامتر حقيقي. نرمز بـ D_α لحيز تعريف f_α وبـ $\mathcal{C}_\alpha$ للمنحنى الممثل لـ f_α في معلم متعامد.

1) أ. تحقق أن $D_0=\mathbb{R}^*$ وأن $\mathcal{C}_0$ مستقيم محروم من نقطة A يجب تحديدها.

ب. حدد D_α من أجل $\alpha\neq0$.

ج. بين أن: $\forall t\in[-1;1];\ \operatorname{Arccos}(t)+\operatorname{Arccos}(-t)=\pi$ ، وأثبت أن جميع المنحنيات $\mathcal{C}_\alpha$ تقبل مركز تماثل مشترك مطلوب تحديده.

د. ادرس إشارة: $f_\alpha(x)-f_\beta(x)$ من أجل x في $D_\alpha\cap D_\beta$ و $\alpha<\beta$ ؛ وأوّل مبيانياً النتيجة.

2) نفترض أن $\alpha\neq0$.

أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f_\alpha(x)$ ؛ وبين أن المستقيم الذي معادلته $y=x+\frac{\pi}{2}$ مقارب مشترك لجميع المنحنيات $\mathcal{C}_\alpha$.

ب. احسب: $\lim\limits_{\substack{x\to|\alpha|\\ x>|\alpha|}}\frac{f_\alpha(x)-f_\alpha(|\alpha|)}{x-|\alpha|}$ (ناقش الحالتين $\alpha>0$ و $\alpha<0$)

أول مبيانياً النتيجة.

ج. حدد f'_α المشتقة الأولى للدالة f_α.

N°20 دراسة الدالة BSM

3) نفترض أن $\alpha>0$.

أ- بين أن f_α تزايدية قطعاً على كل مجال من مجالات D_α.

ب- ضع جدول تغيرات f_α.

4) أنشئ C_0 و C_1 في نفس المعلم.

5) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = a \ ; \\ u_{n+1} = f_\alpha(u_n) \ ; \ n\geq 0 \end{cases}$$

حيث: $0<\alpha<a$.

أ- مثل في المعلم السابق على محور الأفاصيل النقط التي أفاصيلها u_0 و u_1 و u_2 و u_3 و u_4 من أجل $\alpha=1$ و $a=e$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعاً.

ج- أثبت أن المتتالية (u_n) غير مكبورة.

د- بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

يونيو 2000 (1)

I

1) احسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x}$ واستنتج أن: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}=0$

2) لكل عدد حقيقي x نضع: $I(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}e^t\,dt$

أ- بدون حساب $I(x)$ بين أن: $\left[\forall x\geq 0 \ ; \ 0\leq I(x)\leq e^x\dfrac{x^3}{6}\right]$ و $\left[\forall x\leq 0 \ ; \ |I(x)|\leq\dfrac{|x|^3}{6}\right]$

ب- باستعمال مكاملتين بالأجزاء بين أن: $I(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$

ج- باستعمال ما سبق بين أن: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

واستنتج أن: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}$

3) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي: $f(x)=e^x\ln(1+x)-x$

ادرس تغيرات الدالة f واستنتج أن $f(x)\geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}^+$ (نقبل أن $\forall x\in\mathbb{R} \ e^x\geq 1+x$)

II -

نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} F(0)=0 \\ F(x)=\displaystyle\int_{1+x}^{e^x}\frac{1}{\ln t}\,dt \ ; \ x>0 \end{cases}$$

1) بين أن: $\forall x>0 \quad \dfrac{e^x-1-x}{x}\leq F(x)\leq\dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}$

2) بين أن F متصلة وقابلة للاشتقاق في النقطة 0 على اليمين.

3) بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وأن $\forall x>0 \quad F'(x)=\dfrac{f(x)}{x\ln(1+x)}$.

4) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ وضع جدول تغيرات F.

5) ادرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة F بجوار $+\infty$.

يوليوز 2000

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\dfrac{x}{e^x-\ln x} \ ; \ x>0 \end{cases}$$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=4\text{cm}$.

1) أ. بين أن f متصلة على اليمين في النقطة 0 ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق في 0 على اليمين.

2) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=e^x-\ln x-xe^x+1$

أ. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

ب- ادرس تغيرات الدالة g.

ج- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α.

د- استنتج إشارة $g(x)$.

3) أ. بين أن $\forall x\in\,]0,+\infty[\quad f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-\ln x)^2}$

ب- استنتج جدول تغيرات f

4) ارسم المنحنى (C). (نأخذ $\alpha\approx 1,2$ و $f(\alpha)\approx 0,3$).

فبراير 2001

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\operatorname{Arcsin}(x-1)-\sqrt{2x-x^2}+2-\dfrac{\pi}{2} & x\in[0,2] \\ f(x)=x-\sqrt{x^2-4} & x\in\,]2,+\infty[\end{cases}$$

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a- حدد D مجموعة تعريف الدالة f . هل الدالة f متصلة في النقطة $x_0=2$ ؟

N°21 دراسة الدالة BSM

b - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C) ؟

2) احسب $f'(x)$ لكل x من $]0,2[$ واحسب $f'(x)$ لكل x من $]2,+\infty[$.

3) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة $x_0=2$.

4) a - بين أن : $\forall t\in]0,1[\quad \dfrac{t}{\sqrt{2t-t^2}} < \sqrt{t}$

b - بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على المجال $[0,x]$ $(0<x<1)$ بين أن : $0<\dfrac{f(x)-f(0)}{x}<\sqrt{x}$

ثم استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر محددا العدد المشتق للدالة f على اليمين في الصفر .

5) a - بين أن $\forall x\in]1,2[\quad \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} > \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

(استعمل مبرهنة التزايدات المنتهية على المجال $[x,2]$)

b - ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في النقطة $x_0=2$.

6) a - ضع جدول تغيرات الدالة f .

b - بين أنه يوجد α من $\left]1,\frac{3}{2}\right[$ بحيث $f(\alpha)=0$

c - ادرس تقعر المنحنى (C) .

d - أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7) لتكن φ الدالة المعرفة بـ $\varphi(x)=f(x+2)$ لكل x من $[1,+\infty[$

a - بين أن : $\forall x\geq 1 \quad \dfrac{2}{x+2} < \varphi(x) < \dfrac{2}{x}$

b - استنتج أن : $\forall x\geq 1 \quad \dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2} < \varphi(x) < \dfrac{2}{x}$

c - نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n=\varphi\left(\dfrac{n^2}{1}\right)+\varphi\left(\dfrac{n^2}{2}\right)+\dots\dots\dots\dots+\varphi\left(\dfrac{n^2}{n}\right)$

باستعمال السؤال 7) b) بين أن : $\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{2(n+1)(2n+1)}{3n^3} < u_n < \dfrac{n+1}{n}$ (تذكير : $\sum\limits_{p=1}^{n} p^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

ثم استنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها .

يونيو 2001

الجزء A : لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=x\ln|x|-(x-1)\ln|x-1| \;;\; x\in\mathbb{R}^*-\{1\} \\ g(0)=g(1)=0 \end{cases}$$

وليكن (C) منحنى الدالة g في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن المستقيم $(\Delta) : x=\frac{1}{2}$ محور تماثل بالنسبة للمنحنى (C).

(لدراسة g نقتصر إذن على $D_E=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$)

2) أدرس اتصال واشتقاق الدالة g في النقطة $x_0=1$.

3) a) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=-1$

b) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C) ؟

4) a) تحقق أن $g'(x)=\ln\left(\frac{x}{|x-1|}\right) \quad \forall x\in D_E-\{1\}$

b) أدرس إشارة $g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

5) a) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الأفصول $x_1=2$.

b) أنشئ (T) و (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\ln 2\approx 0,7)$

6) ما هي إشارة $g(x)$ ؟

7) لتكن G الدالة العددية المعرفة على $]0,1[$ بـ : $G(x)=-x+x^2\ln x-(x-1)^2\ln(1-x)$

a) أحسب $G'(x)$ لكل x من $]0,1[$.

b) - استنتج حساب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوى المحصور بين (C) و(Ox) وللمستقيمين المحددين بالمعادلتين $x=\lambda$ و $x=1-\lambda$ (حيث $\frac{1}{2}<\lambda<1$).

- أحسب $\lim\limits_{\lambda\to 1^-} A(\lambda)$.

الجزء B : لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln|x-1|}{\ln|x|} \quad \forall x\in\mathbb{R}^*-\{-1,1\} \\ f(0)=0 \end{cases}$$

وليكن (Γ) منحناها في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس اتصال واشتقاق f في الصفر.

2) أحسب نهايات f عند محدات مجموعة تعريفها.

3) a) بين أن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(x-1)(\ln|x|)^2} \quad \forall x\in\mathbb{R}^*-\{-1,1\}$

b) أدرس إشارة $f'(x)$ وضع جدول تغيرات الدالة f.

4) a) حدد تقاطع المنحنى (Γ) مع محور الأفاصيل (ox).

b) أحسب $f(-2)$ وأنشئ (Γ) في المعلم السابق. $(\ln 3\approx 1,1)$

يوليوز 2001

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي : $f(x)=|x|+\ln(\cos x)$

و (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) اختزل مجال دراسة f.

b) تحقق أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x}=0$ ثم ادرس قابلية اشتقاق f في الصفر.

c) ادرس تغيرات الدالة f واعط جدول تغيراتها.

2) a) ادرس تقعر المنحنى (C).

b) بين أنه يوجد عنصر وحيد α من $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

c) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\pi\approx 3,14 \;;\; \ln 2\approx 0,7)$

3) نعتبر الدالة العددية F المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ و (Γ) منحناها في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

N°22 # دراسة الدالة BSM

a) حدد مجموعة تعريف F وبين أن F دالة فردية.

b) بين أن F قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ثم احسب $F'(x)$.

c) ادرس تغيرات الدالة F على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

d) بين أن النقطة التي أفصولها $\frac{\pi}{4}$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (Γ) ثم استنتج تقعر (Γ) على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

4) نضع $G(x) = \int_0^x \ln(\cos t)\,dt$ حيث $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

a) بين أن : $G(x) = 2G\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - 2G\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + x\ln 2$ $\quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

(يمكن اعتبار مشتقتي طرفي المتساوية)

b) نتقبل أن G تقبل نهاية l على اليسار في النقطة $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

تحقق أن $l = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

c) استنتج نهاية F على اليسار في النقطة $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

يونيو 2002

لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = \int_{-1}^{1} e^{xt}\sqrt{1+t^2}\,dt$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- بين أن الدالة F زوجية.

2- أ- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ ;\ F(0)e^{-x} \le F(x) \le F(0)e^{x}$

ب- استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في 0 .

3- أ- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} ;\ F(x) \ge \frac{e^{x}-e^{-x}}{x}$

ب- استنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

4- أ- باستعمال التغيير $u = t+\sqrt{1+t^2}$ حدد قيمة التكامل $\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

ب- استنتج قيمة $F(0)$.

5- أ- ليكن x_0 عنصرا من $\mathbb{R}$ و t عنصرا من $[-1,1]$.

نضع $g(x) = \frac{e^{xt}-e^{x_0 t}}{x-x_0}$ من أجل كل عدد حقيقي x حيث : $x \neq x_0$

بين أن : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}; \exists \eta \in \mathbb{R}^{+*} : \forall x \in \mathbb{R}, 0<|x-x_0|<\eta \Rightarrow \left|g(x) - te^{x_0 t}\right| < \frac{\varepsilon}{F(0)}$

ب- استنتج أن الدالة F قابلة للاشتقاق في x_0 وأن : $F'(x_0) = \int_{-1}^{1} te^{x_0 t}\sqrt{1+t^2}\,dt$

ج- حدد العدد المشتق للدالة F في 0 .

6-أ- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} ;\ F'(x) = \int_0^1 t(e^{xt}-e^{-xt})\sqrt{1+t^2}\,dt$

ب- استنتج أن الدالة F تزايدية على $\mathbb{R}^+$.

7- أنشئ المنحنى (C) .

يوليوز 2002

لكل عنصر n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(e^t+e^{-t})^n}$.

وليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بين أن الدالة f_n فردية.

ب- بين أن f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وحدد دالتها المشتقة.

ج- بين أن f_n تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

د- بين أن O نقطة انعطاف بالنسبة للمنحنى (C_n).

ه- حدد الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}).

2) أ- حدد الدالتين f_1 و f_2.

ب- بين أن نهايتي الدالتين f_1 و f_2 عند $+\infty$ هما $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{1}{4}$ على التوالي.

ج- أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2).

3) نعتبر أن : $n \ge 3$.

أ- تحقق أن : $\forall t \in \mathbb{R} ;\quad \frac{4}{(e^t+e^{-t})^n} = \frac{1}{(e^t+e^{-t})} - \frac{(e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^n}$

ب- بين أن : $\forall t \in \mathbb{R} ;\quad 4(n-1)f_n(x) = (n-2)f_{n-2}(x) + \frac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^{n-1}}$

ج- نفترض أن f_n تقبل نهاية λ_n عند $+\infty$.

حدد علاقة بين λ_n و λ_{n-2}. واستنتج أن : $\forall p \in \mathbb{N}^* ;\ \lambda_{2p+1} = \frac{(2p)!}{4^{2p} \times (p!)^2} \times \frac{\pi}{4}$

فبراير 2003 قديم

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\text{Arctan}\,x\right)$$

N°23 دراسة الدالة BSM

و (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بين أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ وأنها فردية .

ب) احسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم استنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى (C) جوار $+\infty$.

2) أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن لكل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{4-(\text{Arctan}\,x)^2}}$$

ب) ضع جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

3) أ) احسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$: $\frac{\text{Arctan}\,x}{2x}<\frac{1}{2}<4-(\text{Arctan}\,x)^2$

ج) استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}^{+}$: $f''(x)\le 0$.

4) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C) عند النقطة التي أفصولها 0

5) أ) باستعمال رتابة الدالة f' على $\mathbb{R}^{+}$ بين أن : $f'(x)\le\frac{1}{2}$ $(\forall x\in\mathbb{R}^{+})$

ب) استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}^{+}$: $f(x)\le\frac{1}{2}x$

6) أنشئ المنحنى (C) (الوحدة 1 cm) (نعطي $\text{Arcsin}(\pi/4)\approx 0,9$).

7) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$u_0\in]0,1[$ ولكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}u_n$.

ب) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $0<u_n\le 1$.

ج) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية .

د) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $0<u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$ ، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

8) نعتبر المتتالية (S_n) المعرفة بما يلي : $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

أ) بين أن المتتالية (S_n) تزايدية قطعا.

ب) بين أن : $u_0\le S_n\le 2u_0\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ج) استنتج أن (S_n) متقاربة.

جونيو 2003 قديم

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{2\}$ بما يلي: $f(x)=\frac{xe^{-x}}{x-2}$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I) 1) أ- احسب نهايات f عند محدات D.

ب- احسب $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ وأول النتيجة المحصل عليها هندسيا.

2) أ- احسب $f'(x)$ وضع جدول تغيرات الدالة f

ب- بين أن : $f''(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-2)^3}e^{-x}$.

ج- بين أن المعادلة $x^3-4x^2+8x-4=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ ينتمي إلى المجال $]\frac{1}{2},1[$ واستنتج أن (C) يقبل نقطة انعطاف.

3) أنشئ (C).

II) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $E=]-\infty,0[\cup]\frac{1}{2},2[$ بـ : $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(t)\,dt$

1) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على E وأن لكل x من E :

$$F'(x)=\frac{x^3(1-2x)e^{-x}+(x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2(x-2)(1-2x)}$$

ب- تحقق من أن لكل x من $]-\infty,0[$ ، $F'(x)>0$ ، وأن لكل x من $]\frac{1}{2},2[$ ، $F'(x)<0$.

2) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(t)=\dfrac{te^{-t}-2e^{-2}}{t-2} ; & t\ne 2\\ g(2)=-e^{-2} \end{cases}$$

أ- بين أن لكل x من $]\frac{1}{2},2[$:

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x}g(t)\,dt=F(x)-2e^{-2}\ln\frac{x(x-2)}{1-2x}$$

ب- بين أن الدالة g تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$ (حسابها غير مطلوب).

ج- استنتج أن : $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\int_{\frac{1}{x}}^{x}g(t)\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{2}g(t)\,dt$

د- استنتج $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}F(x)$ (حساب $\int_{\frac{1}{2}}^{2}g(t)\,dt$ غير مطلوب).

3) نفترض أن $x>1$

أ- بين أن : $F(-x)=-\int_{1}^{x}\frac{ue^{u}}{u+2}du+\int_{1}^{\frac{1}{x}}\frac{ue^{u}}{u+2}du$

ب- بين أن : $\lim_{x\to+\infty}\int_{1}^{\frac{1}{x}}\frac{ue^{u}}{u+2}du=\int_{1}^{0}\frac{ue^{u}}{u+2}du$ (لاحظ أن الدالة $u\longmapsto\frac{ue^{u}}{u+2}$ تقبل دالة أصلية على $[0,1]$).

ج- بين أن : $\int_{1}^{x}\frac{ue^{u}}{u+2}du>\frac{e^{x}-e}{x+2}$ واستنتج أن $\lim_{x\to+\infty}\int_{1}^{x}\frac{ue^{u}}{u+2}du=+\infty$

د- استنتج أن : $\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$

4) تحقق من أن لكل x من E : $F\left(\frac{1}{x}\right)=-F(x)$ واستنتج $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}F(x)$ و $\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}}F(x)$