التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2017
- الموضوع -

NS 22

★★

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها	المعامل	7

Phy.handa@gmail.com
GSM : 0661931283

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي:

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	حساب الاحتمالات	3 نقط
التمرين الثالث	الأعداد العقدية	3 نقط
المسألة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل و المتتاليات العددية	11 نقطة

- بالنسبة للمسألة ، $\ln$ يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري.

التمرين الأول : (3 نقط)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، المستوى (P) المار من النقطة $A(0\,,\,1\,,\,1)$ و $\vec{u}(1\,,\,0\,,\,-1)$ متجهة منظمية عليه و الفلكة (S) التي مركزها النقطة $\Omega(0\,,\,1\,,\,-1)$ و شعاعها $\sqrt{2}$

1) أ- بين أن $x-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) 0.5

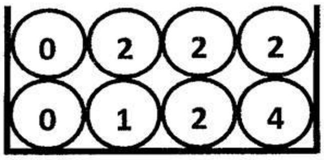
ب- بين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) و تحقق من أن $B(-1\,,1\,,0)$ هي نقطة التماس. 0.75

2) أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة A و العمودي على المستوى (P) 0.25

ب- بين أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1\,,\,1\,,\,0)$ 0.75

3) بين أن $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$ و استنتج مساحة المثلث OCB 0.75

التمرين الثاني : (3 نقط)



يحتوي صندوق على ثماني كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس و تحمل كل واحدة منها عددا كما هو مبين في الشكل جانبه.

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1) نعتبر الحدث A : " من بين الكرات الثلاث المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل العدد 0 ". 1.5

و الحدث B : " جداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 8 ".

بين أن $p(A)=\dfrac{5}{14}$ و أن $p(B)=\dfrac{1}{7}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة.

أ- بين أن $p(X=16)=\dfrac{3}{28}$ 0.5

ب- الجدول جانبه يتعلق بقانون احتمال المتغير العشوائي X 1

أتمم ملء الجدول بعد نقله على ورقة تحريرك معللا أجوبتك.

x_i	0	4	8	16
$p(X=x_i)$				$\dfrac{3}{28}$

التمرين الثالث : (3 نقط)

نعتبر العددين العقديين a و b بحيث $a=\sqrt{3}+i$ و $b=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i$

1) أ- تحقق من أن $b=(1+i)a$ 0.25

ب- استنتج أن $|b|=2\sqrt{2}$ و أن $\arg b\equiv\dfrac{5\pi}{12}\;[2\pi]$ 0.5

ج- استنتج مما سبق أن $\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 0.5

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما a و b و النقطة C التي لحقها c بحيث $c=-1+i\sqrt{3}$

أ- تحقق من أن $c=ia$ و استنتج أن $OA=OC$ و أن $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ 0.75

ب- بين أن النقطة B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$ 0.5

ج- استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع . 0.5

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

المسألة : (11 نقطة)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$

0.25	**1)** تحقق من أن $g(1)=0$
1	**2)** انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g جانبه : بين أن $g(x)\leq 0$ لكل x من المجال $]0\,,1]$ و أن $g(x)\geq 0$ لكل x من المجال $[1\,,+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1\ cm$)

0.5	**1)** بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ و أول هندسيا النتيجة.
0.25	**2)** أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
0.75	ب- بين أن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$
1	**3)** أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$
0.75	ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0\,,1]$ و تزايدية على المجال $[1\,,+\infty[$
0.25	ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$
0.5	**4)** أ- حل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة $\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x=0$
0.5	ب- استنتج أن المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين يتم تحديد زوج إحداثيتي كل منهما.
0.75	ج- بين أن $f(x)\leq x$ لكل x من المجال $[1\,,2]$ واستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D) على $[1\,,2]$
1	**5)** أنشئ ، في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، المستقيم (D) و المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها محصور بين $2,4$ و $2,5$)
0.5	**6)** أ- بين أن $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$
0.25	ب- بين أن الدالة $H:x\mapsto 2\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto \dfrac{2}{x}-1$ على المجال $]0,+\infty[$
0.5	ج- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\displaystyle\int_1^2\left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x\,dx=(1-\ln 2)^2$
0.5	د- احسب ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$

III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=\sqrt{3}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $I\!N$

0.5	**1)** بين بالترجع أن $1\leq u_n\leq 2$ لكل n من $I\!N$
0.5	**2)** بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكنك استعمال نتيجة السؤال II) 4) ج-)
0.75	**3)** استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

حلول الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا – الدورة العادية 2017
مادة الرياضيات ـ شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

التمرين الأول :

1ـ أـ لتكن : $ax+by+cz+d=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P) و بما ان : $\vec{u}(1,0-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P) فان : $a=1$ و $b=0$ و $c=-1$ و منه معادلة المستوى (P) تصبح : $x-z+d=0$ وبما ان : المستوى (P) يمر من النقطة $A(0,1,1)$ فان : $0-1+d=0$ أي ان : $d=1$ و منه فان : $x-z+1=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P).
1ـ بـ + لنحسب مسافة النقطة $\Omega(0,1,-1)$ عن المستوى $(P):\ x-z+1=0$ لدينا : $d(\Omega,(P))=\dfrac{\lvert x_\Omega-z_\Omega+1\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ يعني : $d(\Omega,(P))=\dfrac{\lvert 0-(-1)+1\rvert}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}$ أي : $d(\Omega,(P))=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ و بما ان شعاع الفلكة (S) هو : $R=\sqrt{2}$ و ان : $d(\Omega,(P))=\sqrt{2}$ أي : $d(\Omega,(P))=R=\sqrt{2}$ فان : المستوى (P) مماس للفلكة (S). + لنتحقق من ان النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S) ▪ لنتحقق من كون $B\in(P)$: $-1-0+1=0$ أي ان : $0=0$ اذن : $B\in(P)$ ▪ لنتحقق من كون $B\in(S)$: لدينا مركز الفلكة (S) هو $\Omega(0,1,-1)$ و شعاعها $R=\sqrt{2}$ أي ان : $(S):\ (x-0)^2+(y-1)^2+(z-(1))^2=\sqrt{2}^2$ أي ان : $(S):\ x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$ و لدينا : $(-1)^2+(1-1)^2+(0+1)^2=2$ أي أن : $2=2$ اذن : $B\in(S)$ ومنه فان : النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S).
2ـ أ – لدينا : المستقيم (Δ) يمر من النقطة $A(0,1,1)$ و بما ان : $(\Delta)\perp(P)$ فان : $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (P) فان : $\begin{cases}x=0+1t\\y=1+0t\\z=1-1t\end{cases};\ (t=IR)$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).
2ـبـ ولدينا : $d(\Omega,(\Delta)=\dfrac{\lVert\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{n}\rVert}{\lVert\vec{n}\rVert}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{2}=R$ و منه (Δ) مماس للفلكة (S) لدينا : $(S):\ x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$ و $C(1,1,0)$ و بما أن : $1^2+(1-1)^2+(0+1)^2=2$ أي $2=2$ فان : $C\in(S)$ و لدينا من جهة أخرى : $(\Delta):\begin{cases}x=0+1t\\y=1+0t\\z=1-1t\end{cases}$ و $\begin{cases}1=0+1t\\1=1+0t\\0=1-1t\end{cases}$ أي $\begin{cases}t=1\\1=1\\t=1\end{cases}$ و منه : $C\in(\Delta)$ و بالتالي (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1,1,0)$
3ـ + حساب $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}$

لدينا : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$ اذن : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$

+ حساب مساحة المثلث OCB

لدينا : $S_{OCB}=\dfrac{\left\|\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|}{2}=\dfrac{2}{2}$ اذن : $S_{OCB}=1$

التمرين الثاني :

1ـ لدينا : $p(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}=\dfrac{C_6^3}{C_8^3}=\dfrac{20}{56}=\dfrac{5}{14}$ و : $p(B)=\dfrac{cardB}{card\Omega}=\dfrac{C_4^3+C_1^1\times C_4^1\times C_1^1}{C_8^3}=\dfrac{4}{56}=\dfrac{1}{7}$

2ـ أـ لدينا : $p(X=16)=\dfrac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3}=\dfrac{6}{56}=\dfrac{3}{28}$

2ـ ب−

القيم التي يأخذها X : $X(\Omega)=\{0,4,8,16\}$

لدينا : $p(X=0)=1-p(\overline{X=0})=1-\dfrac{C_6^3}{C_8^3}=1-\dfrac{20}{56}=\dfrac{36}{56}=\dfrac{9}{14}$

و : $p(X=4)=\dfrac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3}=\dfrac{6}{56}=\dfrac{3}{28}$

و : $p(X=8)=\dfrac{C_4^3+C_1^1\times C_4^1\times C_1^1}{C_8^3}=\dfrac{8}{56}=\dfrac{1}{7}$

و : $p(X=16)=\dfrac{6}{56}=\dfrac{3}{28}$ (حسب نتيجة السؤال السابق)

وبالتالي :

$X=x_i$	0	4	8	16
$p(X=x_i)$	$\dfrac{9}{14}$	$\dfrac{3}{28}$	$\dfrac{1}{7}$	$\dfrac{3}{28}$

التمرين الثالث :

1ـأـ لدينا : $(1+i)a=(1+i).(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i-1=\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)=b$

اذن : $b=(1+i)a$

1ـبـ لدينا : $b=(1+i)a$ يعني : $|b|=|(1+i).a|=|1+i|\times|a|=\sqrt{1^2+1^2}\times\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2\sqrt{2}$

لدينا : $\arg b\equiv\arg[(1+i).a]\equiv\arg(1+i)+\arg(a)$

- ولدينا : $1+i=\sqrt{2}.(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}.(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$ أي أن : $\arg(1+i)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$
- و : $a=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2})=2.(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})$ أي أن : $\arg(a)\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

وبالتالي : $\arg b\equiv(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6})[2\pi]\equiv\dfrac{5\pi}{12}[2\pi]$

1ـجـ لدينا : $b=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$ و : $|b|==2\sqrt{2}$ يعني : $b=2\sqrt{2}.(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}+i\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}})$

يعني : $b=2\sqrt{2}.(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})$ وبماأن : $\arg b\equiv\dfrac{5\pi}{12}[2\pi]$ فان : $\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2ـ أـ لدينا : $ia=i.(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}i+i^2=-1+\sqrt{3}i$ اذن : $c=ia$

لدينا : $c=ia$ يعني أن : $\dfrac{c}{a}=i$ يعني أن : $\begin{cases}\left\lvert\dfrac{c}{a}\right\rvert=1\\ \dfrac{c}{a}=1.(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2})\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}\lvert c\rvert=\lvert a\rvert\\ \arg\dfrac{c}{a}\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}\lvert c-o\rvert=\lvert a-o\rvert\\ \arg\dfrac{c-o}{a-o}\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ اذن : $\begin{cases}OA=OC\\ (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$
2ـبـ تذكران : ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالازاحة T التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$. يعني : $T(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow z'-z=c$ لدينا : + لحق المتجهة $\overrightarrow{OC}$ هو : $Aff\,(\overrightarrow{OC})=c=ia$ + لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو : $Aff\,(\overrightarrow{AB})=b-a=(1+i).a-a=ia$ اذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ أي : $b-a=c$ و منه فان : النقطة B هي صورة النقطة A الازاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$.
2ـجـ لدينا : B هي صورة النقطة A الازاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$ يعني : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ أي ان : $OABC$ متوازي أضلاع   و بما أن : $OA=OC$ و ان : $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ (حسب نتيجة السؤال 2ـأ)   فان : $OABC$ مربع.

المسألة :

Iـ 1ـ لدينا : $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$ و : $D_g=]0,+\infty[$ و : $1\in]0,+\infty[$ يعني : $g(1)=1^2+1-2+2\ln 1$ اذن : $g(1)=0$
2ـ ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$ ، يعني : $x\in]0,1]$ أو $x\in[1,+\infty[$ ▪ اذا كان : $x\in]0,1]$: لدينا $x\le 1$ و بما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فان : $g(x)\le g(1)$ و منه فان : $g(x)\le 0$ $\forall x\in]0,1]$ ▪ اذا كان : $x\in[1,+\infty[$: لدينا $x\ge 1$ و بما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فان : $g(x)\ge g(1)$ و منه فان : $g(x)\ge 0$ $\forall x\in[1,+\infty[$
IIـ 1ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x+(1-\dfrac{2}{x})\ln x$ و بما أن : $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}1-\dfrac{2}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ فان : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ بما ان $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ فان : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C) على يمين 0.
2ـ أـ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+(1-\dfrac{2}{x})\ln x$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\ln x-2\dfrac{\ln x}{x}$ و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ فان : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
2ـبـ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ولدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{\ln x}{x}-2\frac{\ln x}{x^2}$ وبما أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$

فان : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

ولدينا من جهة اخرى : $\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{2}{x})\ln x=\lim_{x\to+\infty}\ln x-2\frac{\ln x}{x}$

وبما أن : $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

فان : $\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=+\infty$

ومنه فان : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ بجوار $+\infty$

3ـأ ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$ ، ولدينا : $f(x)=x+(1-\frac{2}{x})\ln x$

اذن : $f'(x)=1+\frac{2}{x^2}\ln x+(1-\frac{2}{x}).\frac{1}{x}$ يعني : $f'(x)=1+\frac{2}{x^2}\ln x+\frac{x-2}{x^2}$

يعني : $f'(x)=\frac{x^2++x-2+2\ln x}{x^2}$ اذن : $\forall x\in]0,+\infty];\quad f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

3ـب لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ و : $\forall x\in]0,+\infty];\ x^2\succ 0$

اذن اشارة f' هي نفسها اشارة $g(x)$ لكل $x\in]0,+\infty[$

و حسب نتيجة السؤال (I-2) :

لدينا : $\forall x\in]0,1]\quad g(x)\le 0$ ومنه : $\forall x\in]0,1];\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\le 0$ اذن : f تناقصية على $]0,1]$

ولدينا : $\forall x\in[1,+\infty[\quad g(x)\ge 0$ ومنه : $\forall x\in[1,+\infty[\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\ge 0$ اذن : f تزايدية على $[1,+\infty[$

3ـج

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4ـأ لدينا : $(1-\frac{2}{x})\ln x=0$ يعني : $\ln x=0$ أو $1-\frac{2}{x}=0$ يعني : $x=1$ أو $x=2$

اذن مجموعة حلول المعادلة $(1-\frac{2}{x})\ln x=0$ على المجال $]0,+\infty[$ هي : $S=\{1,2\}$

لاحظ ان : $1\in]0,+\infty[$ و ان : $2\in]0,+\infty[$

4ـب ـ لدينا : $f(x)=x$ يعني : $(1-\frac{2}{x})\ln x=0$ يعني : $x=1$ أو $x=2$

ومنه المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين هما : $M(1,1)$ و $N(2,2)$

4ـج لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[\ ;\ f(x)-x=(1-\frac{2}{x})\ln x=\frac{x-2}{x}.\ln x$

وبما أن : $\forall x\in[1,2]\ \ln x\ge 0$ و $\forall x\in[1,2]\ x-2\le 0$ و $\forall x\in[1,2]\ x\ge 0$

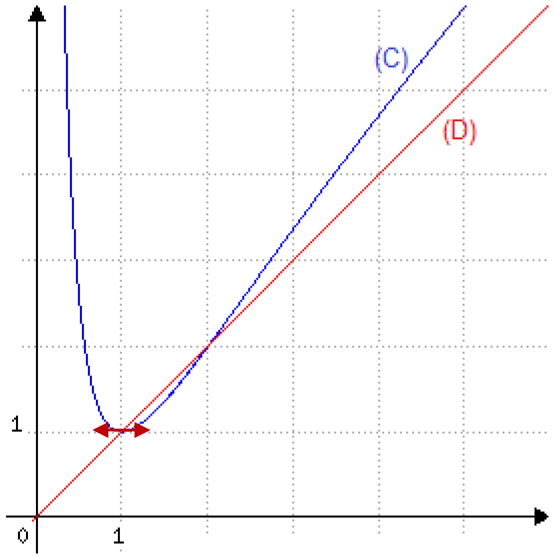
فان : $\forall x\in[1,2]\ \frac{x-2}{x}.\ln x\le 0$ أي ان : $\forall x\in[1,2]\quad f(x)-x\le 0$

وبالتالي فان : $\forall x\in[1,2]\quad f(x)\le x$

M'bark HANDA GSM : 0661931283 phy.handa@gmail.com

بما أن : $f(x)\leq x \quad \forall x\in[1,2]$ فان المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $[1,2]$

5ـ تمثيل المنحنى (C) و المستقيم (D) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$



6ـأ $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx=\int_1^2 \frac{1}{x}.\ln x.dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2=\frac{(\ln 2)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=\frac{1}{2}.(\ln 2)^2$

6ـب لدينا : $H(x)=2\ln x-x$ و $h(x)=\dfrac{2}{x}-1$

لدينا : H دالة متصلة على المجال $]0,+\infty[$ (لأنها مجموع دوال متصلة على $]0,+\infty[$)

و لدينا : $H'(x)=(2\ln x-x)'=\dfrac{2}{x}-1$ يعني : $H'(x)=h(x)$

اذن : H دالة أصلية للدالة h على المجال $]0,+\infty[$.

6ـج لدينا : $\displaystyle\int_1^2(\frac{2}{x}-1)\ln xdx=[(2\ln x-x).\ln x]_1^2-\int_1^2\frac{2\ln x-x}{x}dx=(2\ln 2-2).\ln 2-2\int_1^2\frac{\ln x}{x}dx+[x]_1^2$

يعني : $\displaystyle\int_1^2(\frac{2}{x}-1)\ln xdx=2(\ln 2)^2-2\ln 2-(\ln 2)^2+1=(\ln 2)^2-2\ln 2+1$

اذن : $\displaystyle\int_1^2(\frac{2}{x}-1)\ln xdx=(\ln 2-1)^2=(1-\ln 2)^2$

6ـد لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$.

لدينا : $\displaystyle\mathcal{A}=\int_1^2|f(x)-x|dx$

و حسب نتيجة السؤال (II – 4ـج) : $f(x)\leq x \quad \forall x\in[1,2]$ أي أن : $f(x)-x\leq 0 \quad \forall x\in[1,2]$

أي ان : $|f(x)-x|=-(f(x)-x)=(\dfrac{2}{x}-1).\ln x \quad \forall x\in[1,2]$

و منه : $\displaystyle\mathcal{A}=\int_1^2(\frac{2}{x}-1)\ln xdx=(1-\ln 2)^2cm^2$

III ـ1 بالنسبة ل $n=0$: لدينا $u_0=\sqrt{3}$ و منه $1\leq u_0\leq 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n=0$)

نفترض أن : $1\leq u_n\leq 2$ و نبين ان $1\leq u_{n+1}\leq 2$

لدينا : $1\leq u_n\leq 2$ أي أن : $u_n\in[1,2]\subset]1,+\infty[$ و بما أن : f تزايدية على $]1,+\infty[$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

فان : $f(1)\leq f(u_n)\leq f(2)$ اي أن : $1\leq u_{n+1}\leq 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n+1$)

	و بالتالي : $\forall n\in IN\ ;\ 1\le u_n\le 2$
2ـ	لدينا حسب نتيجة السؤال (II.4ـج) : $\forall x\in[1,2]\ ;\ f(x)\le x$ و لدينا من جهة أخرى : $\forall n\in IN\ ;\ 1\le u_n\le 2$ أي أن : $\forall n\in IN\ ;u_n\in[1,2]$ اذن : $\forall n\in IN\ ;\ f(u_n)\le u_n$ يعني : $\forall n\in IN\ ;\ u_{n+1}\le u_n$ و بالتالي فان المتتالية (u_n) تناقصية
3ـ	+ لدينا : $\forall n\in IN\ ;\ 1\le u_n\le 2$ يعني ان المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 1 و بما أن المتتالية (u_n) تناقصية فانها متقاربة . + لدينا f متصلة على المجال $]0,+\infty[$ و بالخصوص على المجال $[1,2]$ و : $f([1,2])=[1,2]$ أي ان : $f([1,2])\subset[1,2]$ و بما أن (u_n) متقاربة و $u_0\in[1,2]$ فان النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق : $f(l)=l$ و حسب نتيجة السؤال (II.4ـب) : $l=1$ أو $l=2$ و بما أن (u_n) تناقصية فان : $\forall n\in IN\ ;\ u_n\le u_0$ أي : $\forall n\in IN\ ;\ u_n\le\sqrt{3}$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\le\sqrt{3}$ و بالتالي فان : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

Phy.handa@gmail.com

GSM : 0661931283