Hachimi | Math تصحيح وطني 2015 العادية | PC-SVT كاشمي

(1/20)

تمرين 1

1) المعادلة الديكارتية للمستوى (P) المار من النقطة $A(2,1,0)$ و المتجهة $\vec{u}(1,1,-1)$ منظمية عليه هي :

$(P):\ x+y-z+d=0$

تحديد d بحيث

$A(2,1,0)\in(P):\ 2+1-0+d=0$

$3+d=0 \Rightarrow \boxed{d=-3}$

ومنه

$$\boxed{(P):\ x+y-z-3=0}$$

طريقة 2: لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من المستوى (P) بحيث

$\vec{AM}\cdot\vec{u}=0$

مع $\vec{u}(1,1,-1)$

و $\vec{AM}(x-2,y-1,z)$

$\vec{AM}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow x-2+y-1-z=0$

$\Leftrightarrow x+y-z-3=0$

ومنه المعادلة الديكارتية للمستوى (P) هي :

$$\boxed{(P):\ x+y-z-3=0}$$

2) لدينا (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء بحيث

$\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$ مع $A(2,1,0)$ و $B(-4,1,0)$

$\Leftrightarrow \vec{MA}\perp\vec{MB}$

ومنه (S) فلكة ~~مركزها~~ قطرها $[AB]$:

• مركزها :

$$\Omega:\begin{cases} x_\Omega=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2-4}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 \\ y_\Omega=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{1+1}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\ z_\Omega=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{0+0}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \Omega(-1,1,0)$$

2/20

ومنه $\Omega(-1,1,0)$ هو مركز الفلكة (S)

⊙ شعاعها، $R = \frac{AB}{2}$

$$R = \frac{\sqrt{(-4-2)^2+(1-1)^2+0^2}}{2} = \frac{\sqrt{36+0+0}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

ومنه $\boxed{R=3}$

(تعتبر هذه الطريقة ① هي الأسهل)

⚠ طريقة ② لدينا $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

مع

~~$\overrightarrow{MA}(2-x, y, z)$~~

$\overrightarrow{MA}(2-x, 1-y, -z)$

$\overrightarrow{MB}(-4-x, 1-y, -z)$

الجداء السلمي $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (2-x)(-4-x)+(1-y)(1-y)+z^2=0$

$\Leftrightarrow -8-2x+4x+x^2+(1-y)^2+z^2=0$

$\Leftrightarrow -8+2x+x^2+1-2y+y^2+z^2=0$

ومنه $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2y-7=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x+y^2-2y+z^2-7=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-0)^2-7=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=9$

ومنه (S) فلكة مركزها $\Omega(-1,1,0)$ وشعاعها $R=\sqrt{9}=3$

3) - أ) مسافة النقطة Ω عن المستوى (P)،

لدينا $\Omega(-1,1,0)$ و $(P): x+y-z-3=0$

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|-1+1-0-3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}$$

نعوض بإحداثيات Ω

المنظمية

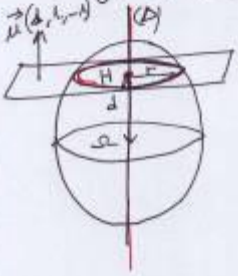
$$d(\Omega,(P)) = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

ومنه : $\boxed{d(\Omega,(P)) = \sqrt{3}}$

وبما أن $R = 3$

إذن $\boxed{d(\Omega,(P)) < R}$

ومنه المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C)



3-ب) تحديد مركز الدائرة (C) : H

ليكن المستقيم (Δ) المار من $\Omega(-1,1,0)$ والموجهة $\vec{u}(1,1,-1)$ موجهة له لأنه عمودي على المستوى (P)؛

إذن تمثيله البارامتري هو:

$$\overrightarrow{\Omega M} = t\vec{u} \Leftrightarrow (\Delta) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = \quad -t \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$$

و المعادلة الديكارتية للمستوى (P) : $(P): x + y - z - 3 = 0$

إذن H هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (P):

$$\boxed{H \in (\Delta) \cap (P)}$$

نعوض x و y و z في المعادلة الديكارتية للمستوى (P):

$$\Leftrightarrow -1 + t + 1 + t + t - 3 = 0$$

$$3t - 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{t = 1}$$

نعوض قيمة t في التمثيل البارامتري لـ (Δ) :

$$H : \begin{cases} x_H = -1 + 1 = 0 \\ y_H = 1 + 1 = 2 \\ z_H = -1 = -1 \end{cases}$$

ومنه $H(0,2,-1)$ هي مركز الدائرة (C).

أما شعاعها هو $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}$

4/20

4) نحسب $\vec{OH}\wedge\vec{OB}$: لدينا $O(0,0,0)$ و $\vec{OH}(0,2,-1)$ ، $\vec{OB}(-4,1,0)$

الجداء المتجهي

$$\vec{OH}\wedge\vec{OB} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$ $\quad = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$

ومنه $\boxed{\vec{OH}\wedge\vec{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}}$

اختصاراً: $\vec{OH}\wedge\vec{OB}(1,4,8)$

استنتاج مساحة المثلث OHB:

$$S_{OHB} = \frac{1}{2}\|\vec{OH}\wedge\vec{OB}\|$$

$$\Leftrightarrow S_{OHB} = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+4^2+8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+16+64} = \frac{\sqrt{81}}{2} = \frac{9}{2}$$

ومنه $\boxed{S_{OHB} = \frac{9}{2}}$

التمرين 2

I) نعتبر: $a = 2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

1) المعيار:

$$|a| = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{4+4\sqrt{2}+2+2}$$
$$= \sqrt{8+4\sqrt{2}} = \sqrt{4(2+\sqrt{2})} = \sqrt{4}.\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

ومنه $\boxed{|a| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

2) تحقق: (أسهل طريقة هي:)

لدينا

$$2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)+2i\sin\frac{\pi}{4} = 2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= 2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$
$$= a$$

لأن: $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

ومنه $\boxed{z = 2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i\sin\frac{\pi}{4}}$

⚠ طريقة 2) بالانطلاق من z (أي العكس) صعبة لا داعي ليشرحها ؟

⚠ هنا يظهر عدم تركيز التلاميذ مع العلم أن الجواب بديهي !!! و تسرعهم في استحضار أي شيء.

3) أ) الأخطاء : $\cos^2\theta$:

حسب صيغة أولير Euler : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$$\cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^2}{4}$$

$\boxed{(e^{x})^{n} = e^{nx}}$

$$\cos^2\theta = \frac{e^{i2\theta}+2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-i2\theta}}{4} = \frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}+2e^{0}}{4}$$

مع $e^0 = 1$

$$\cos^2\theta = \frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}+2}{4}$$

ولدينا

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$\Leftrightarrow e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

بصفة عامة

$e^{iX}+e^{-iX} = 2\cos X$

و لدينا $e^{i2\theta}+e^{-i2\theta} = 2\cos(2\theta)$

ومنه

$$\cos^2\theta = \frac{2\cos(2\theta)+2}{4}$$

$$\cos^2\theta = \frac{2(\cos(2\theta)+1)}{4}$$

ومنه

$$\cos^2\theta = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$$

وإذن $\boxed{1+\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta}$

إخطاء $\cos^3\theta$ أخطر أنظر التصحيح

ب) لدينا: $z = 2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) + i2\sin\frac{\pi}{4}$

لدينا حسب السؤال السابق

$1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$

في هذه الحالة: $2\theta = \frac{\pi}{4}$

ومنه $\theta = \frac{\pi}{8}$

$$\boxed{1+\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{8}}$$

وحسب تذكير: $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$

في هذه الحالة (بالمماثلة): $2\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8}$

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

ومنه نعوض

$$z = 2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) + i2\sin\frac{\pi}{4}$$

$$z = 2\cdot\left(2\cos^2\frac{\pi}{8}\right) + i2\left(2\cos\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\boxed{z = 4\cos^2\frac{\pi}{8} + i4\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}}$$

⚠ أين تكمن الصعوبة في هذا؟ - هذا يؤكد تسرع التلاميذ في إصدار الأحكام وعدم تعويد التلاميذ على ما هو أصعب

ج) لدينا حسب السؤال السابق

$$z = 4\cos^2\frac{\pi}{8} + i4\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$$

نعمل بـ $\cos\frac{\pi}{8}$:

$$\boxed{z = 4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)}$$

بما أن $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ اذن هو الشكل المثلثي لـ z مع:

المعيار $|z| = 4\cos\frac{\pi}{8}$ و العمدة $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

7/20

• لدينا $z = 4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

$$z^4 = \left[4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]^4$$

صيغة موافر Moivre
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$$z = \left(4\cos\frac{\pi}{8}\right)^4\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^4$$

$$= \left(4\cos\frac{\pi}{8}\right)^4\left(\cos 4.\frac{\pi}{8} + i\sin 4.\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \left(4\cos\frac{\pi}{8}\right)^4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{so} \begin{cases}\cos\frac{\pi}{2} = 0\\ \sin\frac{\pi}{2} = 1\end{cases}$$

ومنه

$$\boxed{z = \left(4\cos\frac{\pi}{8}\right)^4 i}$$

بما أن معيار z هو:

$|z| = 4\cos\frac{\pi}{8}$ حسب كتابة المثلثية

و

$|z| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ حسب السؤال ①.

بالمماثلة نجد : $4\cos\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

ومنه

$$z = \left(4\cos\frac{\pi}{8}\right)^4 i$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i}$$

II) 1) لدينا $R(\Omega, \frac{\pi}{2})$

لأن $R(A) = B$ صورة B بالدوران A R.

الكتابة العقدية لدوران هي: (أنظر التعريف)

$$b - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - \omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad b = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - \omega) + \omega$$

مع $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

إذن $b = i(2 + \cancel{\sqrt{2}} + i\sqrt{2} - \cancel{\sqrt{2}}) + \sqrt{2}$

$$b = i(2 + i\sqrt{2}) + \sqrt{2}$$

$$b = 2i - \sqrt{2} + \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{b = 2i}$$

2) تحديد مجموعة النقط $M(z)$:

$a = 2i$ لحق النقطة A مع $|z - 2i| = 2$

$$|z - a| = 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{AM = 2}$$

ومنه مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة التي مركزها A وشعاعها 2.

تذكير: المسافة AB
$AB = |z_B - z_A|$
المعيار

تذكر، وابني ذاتك بذاتك !!!

التمرين 3

7 كرات U_1: VVV RRRR

5 كرات U_2: VV RRR

I) نسحب عشوائيا وتآنيا 3 كرات من الصندوق U_1

كون الإمكانيات هو د

$card\,\Omega = C_7^3 = \frac{7.6.5}{3!} = 35$ لأن $3! = 6$

(9)

$p(A) = \dfrac{card A}{card \Omega}$ RVV

$$p(A) = \frac{C_4^1 C_3^2}{35} = \frac{4 \times 3}{35} = \frac{12}{35}$$

ومنه $\boxed{p(A) = \dfrac{12}{35}}$

$p(B) = \dfrac{card B}{card \Omega}$ RRR أو VVV

$$p(B) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{35} = \frac{4+1}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

ومنه $\boxed{p(B) = \dfrac{1}{7}}$

II) (انتبه طبيعة السحب تغيرت)

نسحب عشوائيا وتآنيا كرتين من U_1 و كرة من U_2

كون الامكانيات هو:

$$card \Omega = C_7^2 \cdot C_5^1 = \frac{7.6}{2} . 5 = 105 \Rightarrow \boxed{card \Omega = 105}$$

الحدث C: RRR

$$p(C) = \frac{card(C)}{card \Omega}$$

$$p(C) = \frac{C_4^2 C_3^1}{105} = \frac{6 \times 3}{105} = \frac{18}{105} = \frac{6}{35}$$

ومنه $\boxed{p(C) = \dfrac{6}{35}}$

⚠ أين هي الصعوبة....

$\frac{10}{20}$ $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$ المسألة 11

(I) 1- $D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x(1-\ln x)\neq 0$ و $x>0\}$

المقام $\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 0$ و $1-\ln x\neq 0$ و $x>0$

$\Leftrightarrow x\neq 0$ و $\ln x\neq 1$ و $x>0$

$\Leftrightarrow x\neq 0$ و $x\neq e^1$ مع $e^1=e\approx 2{,}7$

و منه $\boxed{D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[}$

$$0 \quad\quad e \quad\quad +\infty$$

أ-2)

$\bullet \displaystyle\lim_{x\to e^+} f(x)=\lim_{e^+}\frac{1}{x(1-\ln x)}=\text{"}\frac{1}{0^-}\text{"}=-\infty$

وانتبه لأن اشارة المقام $1-\ln x$ سالبة على اليمين e

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln x$		$+$	0	$-$	

و منه

$$\boxed{\lim_{x\to e^+} f(x)=-\infty}$$

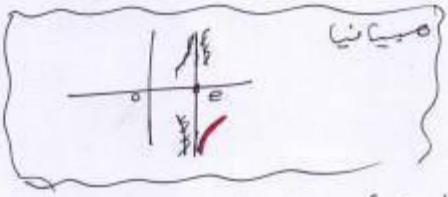
$\bullet \displaystyle\lim_{x\to e^-} f(x)=\lim_{e^-}\frac{1}{x(1-\ln x)}=\text{"}\frac{1}{0^+}\text{"}=+\infty$

لأن إشارة المقام موجبة على اليسار e

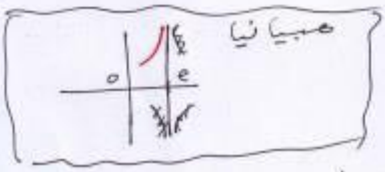
و منه $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to e^-} f(x)=+\infty}$

تأويل الهندسي،

• لدينا $\lim\limits_{x \to e^+} f(x) = -\infty$ ، المستقيم $x=e$ مقارب عمودي لـ $(\mathscr{C}_f)$



• $\lim\limits_{x \to e^-} f(x) = +\infty$: المستقيم $x=e$ مقارب عمودي لـ $(\mathscr{C}_f)$



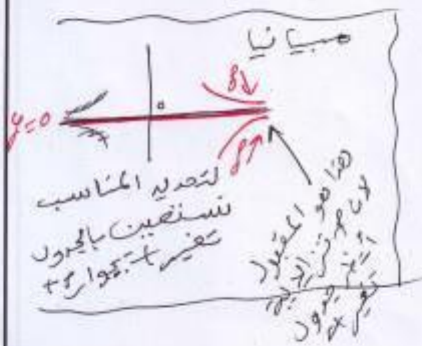
ب) حسب

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{1}{x(1-\ln x)} = 0$$

لأن $\lim\limits_{+\infty} \ln x = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

إذن $y=0$ مقارب أفقي لـ $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$.



ج) حساب

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{1}{x(1-\ln x)}$$

مع $x(1-\ln x) = x - x\ln x$

$$= \lim_{0^+} \frac{1}{x - x\ln x} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = +\infty$$

للشرح فقط

لأن

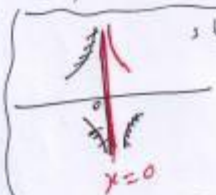
$$\lim_{0^+} x\ln x = 0$$

ومنه

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$$

التأويل الهندسي: $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_1)

مبيانيا:



3) -أ- حساب المشتقة:

انتبه:

$$\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$$

$$f'(x) = -\frac{[x(1-\ln x)]'}{(x(1-\ln x))^2}$$

$$f'(x) = -\frac{x'(1-\ln x) + x(1-\ln x)'}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{1-\ln x + x\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^2(1-\ln x)^2} = -\frac{\cancel{1}-\ln x\cancel{-1}}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{-\ln x}{x^2(1-\ln x)^2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}}$$

13/20

3) ب) دراسة الرتابة : لدينا $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\ln x$ لأن $x^2(1-\ln x)^2>0$

وإشارة $\ln x$ هي:

x	0		1		e	$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		

ومنه $\forall x\in]0,e[\cup]e,+\infty[$

• $\forall x\in]0,1]$: $\ln x<0 \Rightarrow f'(x)<0$

إذن $f(x)$ تناقصية على $]0,1]$

• $\forall x\in[1,e[\cup]e,+\infty[$; $\ln x>0$ إذن $f(x)$ تزايدية على المجالين $[1,e[\cup]e,+\infty[$.

ج) جدول تغيرات الدالة $f(x)$ (نجمع جميع المعطيات)

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

$f(1)=1$

14/20

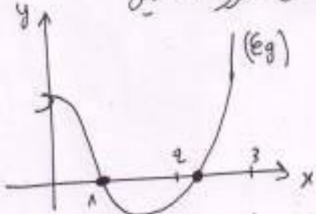
$$g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$$

II

1 - أ - عدد حلول المعادلة $(E): g(x) = 0$ مبيانياً

هي عدد نقط التقاطع للمنحنى (C_g) مع محور الأفاصيل

~~وعدد عدد حلول~~



ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل

حلين (حسب الشكل)

1 - ب - (نستعمل مبرهنة القيم الوسيطية أي المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $2,2 < \alpha < 2,3$

لدينا $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$

• الدالة $x \to x^2$ متصلة على $]2,2 ; 2,3[$ لأنها حدودية

$x \to \ln x$ متصلة على $]2,2 ; 2,3[$ لأنها متصلة على $]0,+\infty[$

ومنه $g(x)$ متصلة على $]2,2 ; 2,3[$ لأنها مجموع وجداء دالتين متصلتين. (أو انطلاقاً من المنحنى (C_g) فهي متصلة).

• انطلاقاً من المنحنى، $g(x)$ تزايدية قطعاً على $]2,2 ; 2,3[$.

• وحسب الجدول: لدينا

$$g(2,2) = -0,02$$
$$g(2,3) = 0,12$$

ومنه

$$\boxed{g(2,2) \times g(2,3) < 0}$$

إذن: حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة (E) تقبل حلاً α بحيث $2,2 < \alpha < 2,3$; $g(\alpha) = 0$

2-أ) تحقق

$$f(x) - x = \frac{1}{x(1-\ln x)} - x$$

$$= \frac{1 - x^2(1-\ln x)}{x(1-\ln x)} = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$$

ومنه

$$\boxed{f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}}$$

2-ب) دراسة تقاطع (C_g) والمستقيم (Δ) :

نحل المعادلة

$$f(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{g(x)}{x(1-\ln x)} = 0 \Rightarrow \boxed{g(x) = 0}$$

تنبيه
$\frac{A}{B} = 0 \Rightarrow A = 0$ و $B \neq 0$

حسب السؤال ①، المنحنى (C_g).
المعادلة تقبل حلين هما

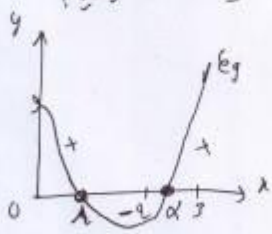
$x_1 = 1$

و

$x_2 = \alpha$

لأن $g(1) = 0$ و $g(\alpha) = 0$

ج) إشارة الدالة $g(x)$ على المجال $[1, \alpha]$ مبيانيا:



x	1		α
$g(x)$	0	$-$	0

لأن المنحنى (C_g) تحت محور الأفاصيل في المجال $[1, \alpha]$.

إذن

$$\boxed{\forall x \in [1, \alpha] : g(x) \leq 0}$$

تذكير: (C_g) فوق محور الأفاصيل فهي موجبة
تحت محور الأفاصيل فهي سالبة

⚠ هناك فرق بين إشارة دالة ورتابة دالة.

• نبين أن $f(x)-x<0$ $\forall x\in[1,\alpha]$

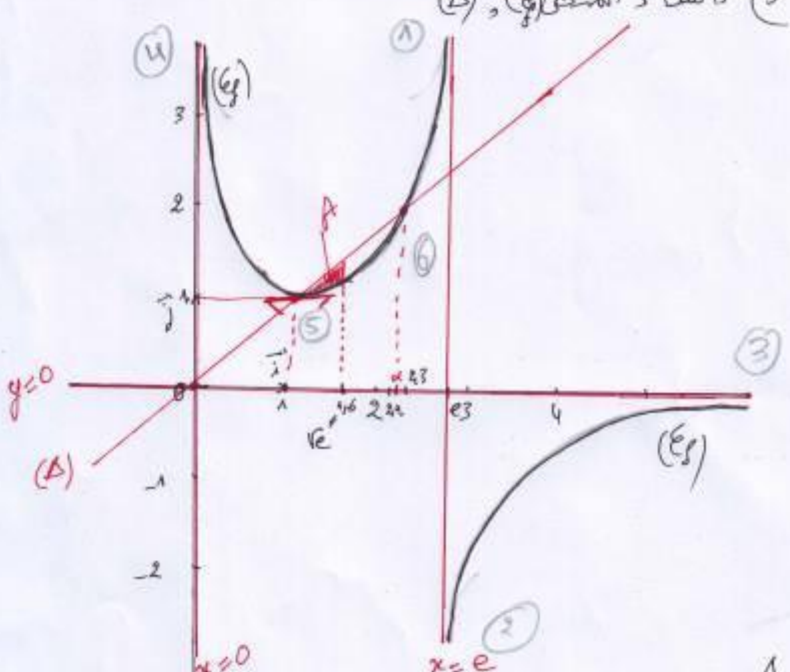
لدينا $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

وإذن إشارة $f(x)-x$ هي إشارة $g(x)$ و $\forall x\in[1,\alpha]: g(x)<0$

إذن $\boxed{f(x)-x<0}$

ملاحظة: $f(x)-x<0$ تعني مبيانياً أن $(\mathcal{C}_f)$ يوجد تحت (Δ)
$\Leftrightarrow f(x)<x$

3) إنشاء المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و (Δ)



⚠ نجمع جميع المعطيات التي تأويلها مبيانيا

$(\Delta): y=x$

$x=0 \Rightarrow y=0\ (0,0)$

$x=1 \Rightarrow y=1\ (1,1)$

$e=2,7$

17/20

إضافة : المنهجية المتبعة لإنشاء المنحنى (C_f) (أنظر الشكل)

① $\lim_{x\to e^-} f(x) = +\infty$: المستقيم $x=e$ مقارب عمودي لـ (C_f)

② $\lim_{x\to e^+} f(x) = -\infty$: المستقيم $x=e$ مقارب عمودي لـ (C_f)

③ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$: $y=0$ مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

محور الفواصل

④ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$: $x=0$ مقارب عمودي لـ (C_f)

⑤ حسب جدول تغيرات (C_f) يقبل مطراف دنوي في النقطة $A(1,1)$

⑥ $f(x)-x\leq 0 \iff f(x)\leq x$ أي (C_f) تحت (Δ) في المجال $[1,\alpha]$ $\forall x\in[1,\alpha]$

و (C_f) يقطع (Δ) في 1 و α و $2{,}2 < \alpha < 2{,}3$

⚠ يجب على التلميذ فهم كيفية رسم كل حالة.

⑦ تجميع جميع المعطيات

---

4) -أ-

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{1}{x}}{(1-\ln x)}\,dx$$

لاحظ أن

$$(1-\ln x)' = -\frac{1}{x}$$

تذكير

$$\frac{U'}{U} \longrightarrow \ln|U|$$

وأن

$$= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{-(1-\ln x)'}{(1-\ln x)}\,dx = -\left[\ln|1-\ln x|\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$\cancel{= -\left[(1-\ln\sqrt{e}) - (1-\ln 1)\right]}$$

$$\cancel{= -\left(1-\frac{1}{2}\right)}$$

ملاحظة

$$\ln\sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln x$$

$$\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$$

18/20

إذن

$$= \int_1^{\sqrt{e}} - \frac{(1-\ln x)'}{(1-\ln x)}\, dx = -\left[\ln|1-\ln x|\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= -\left[\ln|1-\ln\sqrt{e}| - \ln(1-\underset{0}{\ln 1})\right]$$

$\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$ و $\ln 1 = 0$

$$= -\left[\ln\left|1-\frac{1}{2}\right| - \ln 1\right]$$

$$= -\left[\ln\left|\frac{1}{2}\right|\right] = -(-\ln 2) = \ln 2$$

ومنه

$$\boxed{\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\, dx = \ln 2}$$

ج) مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) و المستقيمين $x=1$ و $x=\sqrt{e}=1{,}64$ حيث $y=x$

$$A = \int_1^{\sqrt{e}} |f(x)-x|\, dx \ UA$$

وحسب المنحنى لدينا (C_f) تحت (Δ) اذن

$$A = \int_1^{\sqrt{e}} (x-f(x))\, dx = \int_1^{\sqrt{e}} x - \frac{1}{x(1-\ln x)}\, dx \ UA$$

$$A = \int_1^{\sqrt{e}} x\, dx - \underbrace{\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\, dx}_{\ln 2}$$

$$A = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} - \ln 2 \ UA$$

$$A = \frac{(\sqrt{e})^2}{2} - \frac{1}{2} - \ln 2 \ UA$$

$$A = \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2} - \ln 2\right) UA$$

$$UA = \|\vec{i}\|.\|\vec{j}\| = 2cm \times 2cm$$

$$\boxed{UA = 4cm^2}$$

ومنه

$$A = \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2} - \ln 2\right).4cm^2$$

$$\boxed{A = (2e - 2 - 4\ln 2)\, cm^2}$$

19/20 $\quad$ III

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1) نبين بالترجع أن، $1 \leq u_n \leq \alpha$

• من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 2$ و $2{,}2 < \alpha < 2{,}3$

وإذن $1 \leq u_0 \leq \alpha$

العبارة صحيحة.

• نفترض أن $1 \leq u_n \leq \alpha$

و نبين أن $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

لدينا حسب الافتراض $1 \leq u_n \leq \alpha$ و حسب الجزء السابق

$f(x)$ تزايدية على $[1,\alpha]$

وإذن $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha)$

مع $f(u_n) = u_{n+1}$

و $f(1) = 1$

و $f(\alpha) \leq \alpha$ لأن $f(x) \leq x$ $\forall x \in [1,\alpha]$

ومنه $\boxed{1 \leq u_{n+1} \leq \alpha}$

وإذن حسب البرهان بالترجع فإن : $1 \leq u_n \leq \alpha$

2) لدينا حسب السؤال II - ٤ - ج. $f(x) - x \leq 0$

$\boxed{f(x) \leq x}$ ← صحة في رتابة متتالية

وإذن $f(u_n) \leq u_n$

$\boxed{u_{n+1} \leq u_n}$

وإذن (u_n) متتالية تناقصية.

20/20

3) باستنتاج، بما أن (U_n) متتالية تناقصية ومصغورة بـ 1، إذن فهي متقاربة (أي تقبل نهاية منتهية)

لدينا الدالة $f(x)$ متصلة على $[1,\alpha]$ لأنها جداء دالتين متصلتين $x \mapsto \alpha$ و $x \mapsto \ln x$ على $[1,\alpha]$

و

$$f([1,\alpha]) = [f(1), f(\alpha)] \subset [1,\alpha]$$

لأن

$f(1)=1$ و $f(\alpha) < \alpha$

ومنه

$$\boxed{f([1,\alpha]) \subset [1,\alpha]}$$

إذن نهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$

من تقاطع (C_f) مع $(\Delta) y=x$

وحسب السؤال 2 - ب المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلين هما 1 و α.

ومنه

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$$

ملحوظة: نهايتها هي حل المعادلة $f(x)=x$ إجمالاً. لا تنس أن في هذه الحالة يصعب حل هذه المعادلة ولهذا يجب التركيز طول الامتحان وتعزيز المعطيات

- L'organisation est la 50 % de la Réussite
- Refaire pour faire

التغيير نفسك يبدأ منك ...

للتواصل في حالة وجود خطأ، face: Mustapha Hachimi Boncarouge

بالتوفيق