المستوى: 2 باك رياضي:"ب"	الامتحان التجريبي	المملكة المغربية
مدة الإنجاز : 4	مادة: الرياضيات	وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي والبحث العلمي وتكوين الأطر
السنة الدراسية: 2006/2005	الصفحة : 1/3	أكاديمية فاس ثانويات م سليمان+أم أيمن+ابن حزم + س ابراهيم

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

السلم

الموضوع الأول: (2ن)

ليكن $m\in\mathbb{C}-\{1\}$ ونعتبر المعادلة: $2z^2-(m-1)(4-i\sqrt{2})z-2i\sqrt{2}(m-1)^2=0$

z_1 و z_2 هما حلي المعادلة حيث z_2 يصبح حقيقيا في حالة m=0

1- أ- ليكن Δ مميز المعادلة بين أن $\Delta=\left((m-1)(4+i\sqrt{2})\right)^2$ ثم حدد z_1 و z_2 — 0,75

ب- نضع $m=i\sqrt{3}$ أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي — 0,5

2- بين أنه إذا كان $m=i\sqrt{3}$ فإن $z_1{}^4=z_2$ ثم حدد الجذور الرابعة للعدد z_2 على الشكل المثلثي. — 0,75

الموضوع الثاني: (7ن)

لكل n من $\mathbb{N}$ نعتبر f_n الدالة المعرفة على $\left]-1,+\infty\right[$ بما يلي $f_n(x)=\dfrac{e^x}{(1+x)^n}$

نرمز بـ (C_n) لمنحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$

الجزء الأول :

1- أ- أدرس تغيرات الدوال f_1 و f_2 (نهايات، حساب مشتقة،جدول تغيرات) — 0,75

ب- أدرس الوضع النسبي ل (C_1) و (C_2) وأنشئهما في نفس المعلم. — 0,5

2- أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_1) و (C_2) والمستقيمات ذات المعادلة $x=0$ و $x=1$ — 0,5

3- أ- أثبت أن لكل $n\in\mathbb{N}^*$ تقبل f_n قيمة دنوية u_n عند العدد n-1 — 0,25

ب- أثبت أن $\forall x\geq 0: f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$ واستنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ تناقصية. — 0,5

ج- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ — 0,25

الجزء الثاني :

لكل $x>\dfrac{1}{e}$ نضع $F(x)=\displaystyle\int_0^{\ln x} f_2(t)dt$

1- علل وجود $F(x)$ لكل $x>\dfrac{1}{e}$ — 0,25

2- أثبت أن $\forall x\in\left]\dfrac{1}{e},1\right]: F(x)\leq x\left(1-\dfrac{1}{1+\ln x}\right)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} F(x)$ — 0,5

3- أ- أثبت أن $F(x)=\dfrac{x}{(1+\ln x)^2}-1+2\displaystyle\int_0^{\ln x} f_3(t)dt$ — 0,5

ب- استنتج أن $\forall x\geq 1: F(x)\geq\dfrac{x}{(1+\ln x)^2}-1$ واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ — 0,5

ج- أثبت أن F تقابل من $\left]\dfrac{1}{e},+\infty\right[$ نحو $\mathbb{R}$ — 0,25

الجزء الثالث : لكل $n\in\mathbb{N}^*$ نضع $I_n=\int_0^1 f_n(t)dt$	
1- أثبت أن $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية تناقصية واستنتج أنها متقاربة.	0 ,5
2- أ- أثبت أن $\forall n\geq 2:\frac{1}{(n-1)}(1-\frac{1}{2^{n-1}})\leq I_n\leq\frac{e}{(n-1)}(1-\frac{1}{2^{n-1}})$	0 ,5
ب- أحسب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} I_n$	0 ,25
3- أ- أحسب $f'_n(x)$ بدلالة $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$	0 ,5
ب- استنتج علاقة بين I_n و I_{n+1}	0 ,25
ج – أثبت أن $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} nI_n=1$	0 ,25

الموضوع الثالث : (5ن)

الجزء الأول :

نعرف في $\mathbb{C}$ قانون داخلي $*$ كما يلي	
$\forall((x,y),(x',y'))\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2:(x+iy)*(x'+iy')=xx'+i(xy'+x'y)$	
1- أثبت أن $*$ تبادلي وتجميعي ويقبل عنصرا محايدا يتم تحديده	0 ,75
2- نضع $G=\{z\in\mathbb{C}/\Re e(z)\neq 0\}$	
أ- أثبت أن $(G,*)$ زمرة تبادلية	0 ,5
ب - لتكن $F=\{x+ix\ln\lvert x\rvert/x\neq 0\}$ أثبت أن $(F,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$	0 ,5

الجزء الثاني :

المستوى $\wp$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$	
ولتكن (H) مجموعة النقط M ذات اللحق z والتي تحقق $\lvert 2i*(z-1)\rvert=\lvert z\rvert$	
1) أثبت أن معادلة (H) هي $3x^2-y^2-8x+4=0$	0 ,25
2) استنتج أن (H) هذلول وحدد في $(O,\vec{i},\vec{j})$ عناصره المميزة ثم أنشئه	0.75

الجزء الثالث :

لكل $z=a+ib$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ نضع $T(z)=\begin{pmatrix}a+b&0&-b\\b&a&-b\\b&0&a-b\end{pmatrix}$ ولتكن O_3 المصفوفة المنعدمة ل $M_3(IR)$	
ولتكن $E=\{T(z)\in IM_3(\mathbb{R})/z\in\mathbb{C}\}$	
نذكر أن $(IM_3(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي و $(IM_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية	
1- أثبت أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي	0 ,5
2- نعتبر المصفوفتين $J=T(i)$ و $I=T(1)$	
أ- بين أن (I,J) أساس للفضاء $(E,+,.)$	0.25
ب- تحقق أن $J^2=O_3$ واستنتج أن $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2:T(z)\times T(z')=T(z*z')$	0 ,5
ج- أثبت أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية . هل هي كاملة؟	0.5
3- ليكن $z\in\mathbb{C}^*$ أثبت أن : T(z) قاسم للصفر في الحلقة $(E,+,\times)\Leftrightarrow\Re\acute{e}(z)=0$	0 ,5

الموضوع الرابع : (3ن)

1- ليكن p عددا أوليا حيث p>2

أ- أثبت أن $\forall k\in\{1,2,....p-1\}: p/C_k^p$ | 0,5

ب- بين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}^*: n^p\equiv n[p]$ | 0,25

2- نعتبر $a\in\mathbb{N}$ حيث $a\wedge p=1$ و نضع $A=\{k\in\mathbb{N}^*/a^k\equiv 1[p]\}$

أ- تحقق أن $(p-1)\in A$ (يمكن استعمال السؤال 1-أ) | 0,25

نرمز بـ d لأصغر عناصر المجموعة A

ب- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ أثبت أنه إذا كان r باقي قسمة n على d فـإن $a^n\equiv a^r[p]$ (لاحظ أن $d\in A$) | 0,25

ج- استنتج أن $\forall n\in A: d/n$ | 0,5

3- نعتبر العدد $u_n=\underbrace{111..........11}_{n\text{مرة}}$ (كتابة u_n في نظمة العدد العشري)

أ- تحقق أن $9u_n=10^n-1$ | 0,25

ب- باستعمال السؤال (1) أثبت أن $10^6\equiv 1[7]$ | 0,25

ج- أثبت أن $6/n\Leftrightarrow 7/u_n$ | 0,5

د- استنتج أصغر مضاعف للعدد 7 والذي يكتب في نظمة العدد العشري بالرقم 1 فقط | 0,25

الموضوع الخامس : (3ن)

لتكن (a_n) متتالية عددية معرفة بما يلي $\begin{cases}a_0=a_1=1\\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\end{cases}$ **نقبل أن** $\forall n\in\mathbb{N}: a_n\in\mathbb{N}^*$

1- أثبت أن (a_n) تزايدية واستنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_{n+1}-a_n\geq 1$ | 0,5

2- أثبت أن $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n\geq n$ واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ | 0,5

3- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}: {a_{n+1}}^2-a_n\times a_{n+2}=(-1)^{n+1}$ | 0,5

4- استنتج أن: $\forall p\in\mathbb{N}: \arctan(\frac{1}{a_{2p}})=\arctan(\frac{1}{a_{2p+1}})+\arctan(\frac{1}{a_{2p+2}})$ | 0,5

5- ليكن ℓ الحل الوحيد الموجب للمعادلة $1+\frac{1}{x}=x$ ونضع $b_n=a_{n+1}-\ell a_n$

أ- بين أن (b_n) متتالية هندسية واستنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}: b_n=(-\frac{1}{\ell})^{n+1}$ | 0,5

ب- أثبت أن $\frac{a_{n+1}}{a_n}-\ell=\frac{1}{a_n}(-\frac{1}{\ell})^{n+1}$ واستنتج أن $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_n$ متتالية متقاربة واحسب نهايتها. | 0,5