الاختبار التجريبي في مادة الرياضيات
السنة الدراسية(2004 – 2005)
مدة الإنجاز :4 ساعات

نيابة عين الشق الحي الحسني
ثانوية ابن زيـــدون
شعبة العلوم الرياضية
المستوى:2 سلك البكالوريا

التمرين الأول (5 نقط)

لتكن المجموعة $E=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ ونضع : $(a,b)*(x,y)=(ax-by,bx+ay)$ $\quad \forall((a,b),(x,y))\in E^2$

1) بين أن * قانون تركيب داخلي في E — 0.25

2) نعتبر التطبيق :
$$h:\ \mathbb{C}^* \to E$$
$$z=a+bi\mapsto h(z)=(a,b)$$

أ) بين أن h تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,*)$ — 1

ب) استنتج أن $(E,*)$ زمرة تبادلية محددا عنصرها المحايد ومماثل عنصر (a,b) في E — 1

ج) ليكن (a,b) عنصرا من E ونضع : $(a,b)^3=(a,b)*(a,b)*(a,b)$ — 0.75

حدد الأزواج (a,b) من E بحيث $(a,b)^3=(1,0)$

3) لتكن المجموعة $H=\{\ (\cos\alpha,\sin\alpha)\ /\ \alpha\in\mathbb{R}\ \}$

أ) بين أن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(E,*)$ — 1.25

ب) ليكن X عنصرا من H و $n\in\mathbb{N}^*$ — 0.75

احسب $\underbrace{X*X*...*X}_{n\text{ مرة}}$

التمرين الثاني (3 نقط)

نعتبر ثلاثة صناديق :

U_1: يحتوي على كرة بيضاء وكرة سوداء

U_2: يحتوي على كرتين لونهما ابيض وكرتين لونهما اسود

U_3: يحتوي على ثلاث كرات بيضاء و وكرتين لونهما اسود

1) نختار عشوائيا أحد الصناديق ونسحب منه عشوائيا كرة واحدة

أ) احسب احتمال الحدث : E"الحصول على كرة بيضاء" — 0.75

ب) علما أننا حصلنا على كرة بيضاء فما هو الاحتمال أن يكون السحب قد تم من U_1 — 0.75

2) نعتبر الاختبار (ξ) "نسحب كرة واحدة من كل صندوق" و نعتبر الحدث :

A " من بين الكرات المسحوبة توجد كرة واحدة سوداء"

أ) احسب احتمال A — 0.75

ب) نكرر الاختبار (ξ) n مرة وعند كل مرة نعيد كل كرة إلى الصندوق الذي سُحبت منه . — 0.75

احسب الاحتمال P_n للحصول على كرة واحدة سوداء مرة واحدة و $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$

التمرين الثالث (9 نقط)

I) نعتبر الدالة العددية u بحيث : $u(x)=e^x-\ln(x)-xe^x+1$

1) ادرس تغيرات u — 0.75

2) أ) بين أن المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0,+\infty[$ وأن $1,23<\alpha<1,24$ — 0.75

ب) حدد إشارة $u(x)$ لكل $x>0$ — 0.5

II) نعتبر الدالة العددية f بحيث $f(x)=\dfrac{x}{e^x-\ln x}$ لكل $x>0$ و $f(0)=0$

1) بين أن f متصلة وقابلة للاشتقاق على يمين 0 — 0.5

2) ادرس تغيرات f — 0.75

3) تحقق أن $f(\alpha)=\dfrac{1}{e^\alpha-\dfrac{1}{\alpha}}$ ثم أعط جدول تغيرات f — 0.5

4) ارسم المنحنى (C_f) للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (خذ $\|\vec{i}\|=2cm$ و $f(\alpha)=0,4$) — 0.75

التمرين الثالث (تابع)

III) لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على $[0,+\infty[$ والتي تنعدم في 1

نعتبر المتتالية العددية (u_n) بحيث $u_n = F(n)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

1) أ) بين أن : $\ln x \leq x-1$ و $e^x \geq x+1$ $(\forall x>0)$ — 0.75

ب) استنتج أن $e^x - \ln x \geq 2$ — 0.25

2) أ) لتكن $v(x) = e^x - x\ln x - \ln x$

باستعمال 1) ب) بين أن $v'(x) \geq 0$ $(\forall x \geq 1)$ ثم استنتج أن $v(x) \geq 0$ $(\forall x \geq 1)$ — 0.5

ب) استنتج أن $f(x) \leq (x+1)e^{-x}$ $(\forall x \geq 1)$ — 0.5

3) بين أن $xe^{-x} \leq f(x)$ $(\forall x \geq 1)$ — 0.5

4) بين أن $\frac{2}{e} - (x+1)e^{-x} \leq F(x) \leq \frac{3}{e} - (x+2)e^{-x}$ $(\forall x \geq 1)$ — 1

5) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أن نهايتها l تحقق $\frac{2}{e} \leq l \leq \frac{3}{e}$ — 1

التمرين الرابع (3 نقط)

ليكن n من $\mathbb{N}^* - \{1\}$ ونضع $a_n = \frac{n^3-1}{n+1}$

1) أ) نضع $d = (n^3-1) \wedge (n+1)$ — 0.75

بين أن $d = (n+1) \wedge 2$ وحدد قيم d حسب زوجية n

ب) هل توجد قيم للعدد n بحيث يكون a_n صحيحًا طبيعيًا ؟ — 0.5

ج) ما هي قيم n التي من أجلها يكون a_n عددًا كسريا غير قابل للاختزال ؟ — 0.5

2) نفترض في هذا السؤال أن a_n عددًا عشريا أي $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2 \ / \ a_n = \frac{\alpha}{10^\beta}$

أ) ليكن p عددًا أوليا موجبا ويقسم $(n+1)$ — 0.75

بين أن $p=5$ أو $p=2$

ب) استنتج أن a_n عدد عشري إذا وفقط إذا $\exists(p,q) \in \mathbb{N}^2 \ / \ a_n = \frac{(2^p \cdot 5^q - 1)^3 - 1}{2^p \cdot 5^q}$ — 0.5

www.9alami.info