

www.9alami.info

❖ تمرين رقم 01:

(1)- لكل  $n \in \mathbb{N}^*$  ، نضع :  $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$  .

أ- بين أن :  $(\forall x \in ]-1; 1[); \ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$  .

ب- استنتج أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq \ln\left(2 + \frac{2}{n-1}\right)$  .

ج- احسب نهاية المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  .

(2)- لكل  $n \in \mathbb{N}^*$  ، نضع :  $v_n = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{3 \times 7} + \dots + \frac{1}{n \times (2n+1)}$  .

✓ بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = 2 - 2u_{n+1} + \frac{1}{n+1}$  ، ثم استنتج نهاية المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  .

❖ تمرين رقم 02:

↔ لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  بما يلي :

$(\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[); f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$  و  $f(1) = 1$  و  $f(0) = 0$

(1)- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$  .

(2)- أدرس إتصال و قابلية اشتقاق  $f$  على اليمين في الصفر .

(3)- أ- بين أن  $f$  متصلة في  $x_0 = 1$  .

ب- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة :  $\varphi: t \mapsto \ln(t) - (t-1) + \frac{1}{2}(t+1)^2$

أثبت أنه :  $(\forall x \in ]0; 1[)(\exists c \in ]x; 1[); \frac{\varphi(x)}{x-1} = \frac{(c-1)^2}{c}$  .

ج- استنتج أن  $f$  قابلة للاشتقاق على اليسار في  $x_0 = 1$  و حدد  $f'_s(1)$  .

د- بين أن :  $(\forall x \in ]1; +\infty[); \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1 - \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(1)}{\frac{1}{x} - 1}$  ، ثم استنتج أن  $f$

قابلة للاشتقاق على اليمين في  $x_0 = 1$  و حدد  $f'_d(1)$  .

هـ- هل  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0 = 1$  ؟ أول النتيجة هندسيا .

(4)- أ- بين أن :  $(\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[); f'(x) = \frac{\ln x - \frac{x-1}{x}}{(\ln x)^2}$  .

ب- بين أن :  $(\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[); \ln x > \frac{x-1}{x}$  ، ثم ضع جدول تغيرات  $f$  .

(5)- أرسم المنحنى  $(C_f)$  في معلم متعامد و ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .

❖ تمرين رقم 03:

I-1) ليكن  $x > 0$  ، بتطبيق مبرهنة رول على الدالة :

$$\varphi : t \mapsto \left( \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \right) t^2 - (\ln(1+t) - t)$$

أثبت أنه :  $\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{-1}{2(1+c)}$  ،  $(\exists c \in ]0; x[)$  ، ثم إستنتج النهاية :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

2) - أحسب بنفس الطريقة النهاية :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2}$

II- ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$  و  $f_n$  الدالة المعرفة على  $\left] \frac{-1}{n}; +\infty \right[$  بما يلي :

$$f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{x} \text{ و } f_n(0) = n$$

1- أحسب النهايتين :  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{-1}{n}\right)^+} f_n(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  ، ثم اعطأ أوليهما الهندسي .

2) أ- بين أن  $f_n$  متصلة على المجال  $I_n$  .

ب- بين أن  $f_n$  قابلة للاشتقاق في الصفر و أحسب  $f_n'(0)$  .

3) أ- بين أن :  $f_n'(x) = \frac{g_n(x)}{x^2(1+nx)}$  ، حيث  $g_n$  هي الدالة

$$g_n(x) = nx - (1+nx)\ln(1+nx)$$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة  $g_n$  على  $I_n$  ، ثم إستنتج أن :

$$g_n(x) < 0 \text{ ، } \forall x \in \left] \frac{-1}{n}; +\infty \right[$$

ج- ضع جدول تغيرات الدالة  $f_n$  ، ثم أرسم المنحنى  $(C_{f_2})$  في معلم متعامد و ممنظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

( مبرزا المماس في النقطة ذات الأفصول  $x_0 = 0$  )

4) أ- بين أن :  $f_n(\alpha_n) = 1$  ،  $(\exists! \alpha_n \in I_n)$  و  $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$  و أن :  $\alpha_n > 0$  .

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) \text{ ، } \forall x \in ]1; +\infty[$$

ج- إستنتج أنه لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^* - \{1\}$  ، لدينا :

$$\ln(n) < \alpha_n < 2\ln(n) \text{ و أن : } \ln(n) < \alpha_n < \ln(1+2n\ln(n))$$

$$\left( \frac{\alpha_n}{\ln(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}^* - \{1\}} \text{ و } (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^* - \{1\}}$$

III- ليكن  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$  و  $F_n$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  بما يلي :

$$F_n(x) = G_n(nx) - G_n(x) \text{ ، } (\forall x \in \mathbb{R}^+) \text{ ، حيث } G_n \text{ دالة أصلية للدالة } f_n \text{ على } \mathbb{R}^+$$

1- بين أن الدالة  $F_n$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}^+$  و أن :

$$F_n'(x) = \frac{\ln(1+n^2x) - \ln(1+nx)}{x} \text{ و } F_n'(0) = n^2 - n$$

(2) - إستنتج منحنى تغير الدالة  $F_n$  على  $\mathbb{R}^+$ .

(3) - أ- بين أن :  $(\forall x \in ]0; +\infty[); (n-1)xf_n'(nx) < F_n(x) < (n-1)xf_n'(x)$ .

ب- أحسب النهايتين :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F_n(x)}{x}$ ، ثم اعط تأويلهما الهندسي.

(4) - أرسم المنحنى  $(C_{F_2})$  في معلم متعامد و ممنظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### ❖ تمرين رقم 04 :

⚡ ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  و  $f_n$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^{*+}$  بما يلي :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$$

(1) - أحسب النهايتين :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .

(2) - ضع جدول تغيرات الدالة  $f_n$  على  $\mathbb{R}^{*+}$ .

(3) - بين أن المعادلة :  $f_n(x) = 0$  (E) تقبل حلا وحيدا  $\alpha_n$  في  $\mathbb{R}^{*+}$  بحيث :  $\alpha_n < 1$ .

(4) - بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); f_n(\alpha_1) < 0$ ، ثم إستنتج أن :  $\alpha_1 \leq \alpha_n$ .

(5) - بين أن :  $(\forall x \in ]0; 1]); \frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$ ، ثم إستنتج أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ .

(6) - أحسب كل نهاية مما يلي :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n$ .

### ❖ تمرين إضافي :

✓ بين أنه :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists! c_n \in ]0; 1[); \ln((c_n)^n + 1) + c_n - 1 = 0$

✓ أدرس تقارب المتتالية  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  و أحسب نهايتها.

إنتهى الموضوع.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$e^{iu} = \cos(u) + i \sin(u)$$

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} \dots + \frac{1}{n} - \log(n) \right)$$

$$V - E + F = 2$$

$$S - I = \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k)}(n) - f^{(2k)}(0)) + R$$