

| | | |
|---------|-------------|---|
| 1/2 | الصفحة | الامتحان التجريبي لنيل شهادة البكالوريا دورة ماي 2004 |
| 4 ساعات | مدة الإنجاز | |
| 10 | المعامل | المادة: الرياضيات الشعبة: علوم رياضية المؤسسة: ثانوية ابن ياسين التأهيلية خريكة |

يسمح باستعمال حاسبة غير قابلة للبرمجة

التمرين 1 (4نقط)

في $(M_3(\mathbb{R}))$ نعتبر المصفوفتان $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و نعتبر المجموعة

$$E = \{M \in (M_3(\mathbb{R})) / M \times A = A \times M\}$$

1- أ) بين أن $(E; +)$ زمرة تبادلية

ب) بين $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

ج) بين أن $(I_3; A; A^2)$ أساس للفضاء $(E; +; \cdot)$

2- بين أن $(E; +; \times)$ حلقة تبادلية واحدة

3- أحسب $(I_3 + A + A^2) \times (I_3 - A)$. هل الحلقة $(E; +; \times)$ كاملة؟

www.9alami.info

التمرين 2 (4.75 نقط)

لكل $z \in \mathbb{C}$ نضع $T(z) = z^2 - \sqrt{2}z + i\sqrt{3}$

1- نعتبر في \mathbb{C} المعادلة $T(z) = -i\sqrt{3}$ وليكن z_1 و z_2 حليها بحيث $\text{Im}(z_1) < 0$

أ) حدد z_1 و z_2 لاحظ أن: $2 - 8i\sqrt{3} = 2(2 - i\sqrt{3})^2$

ب) أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلي

ت) حدد مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n \in \mathbb{R}$

2- ننسب المستوى العقدي الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$

أ- نعتبر المجموعة $E = \{M(z) / T(z) \in i\mathbb{R}\}$

بين أن E هذلول محدد مركزه ورأسه ومقاربه في المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$

ب- أنشئ المجموعة E .

التمرين 3 (1.75 ن)

ليكن $n \in \mathbb{Z} - \{-2001; 2\}$ و لنضع $f(n) = \frac{n+2001}{n-2}$

1- أ) بين أن $(n-2) \wedge (n+2001) = (n-2) \wedge 2003$

ب) تحقق أن 2003 أولي.

ج) استنتج القيم الممكنة للعدد $(n-2) \wedge (n+2001)$

د) حدد مجموعة قيم n حيث $(n-2) \wedge (n+2001) = 2003$

2- حدد قيم n حيث $f(n) \in \mathbb{Z}$

التمرين 4 (2.50 نقطة)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي $u_0 = -\frac{5}{4}$ و $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (2 + u_n)^2 - 2$

1- أ) بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad -2 < u_n < 1$

ب) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعاً.

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \ln(u_n + 2)$

أ) بين أن (v_n) هندسية

ب) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

ج) أحسب $S_n = \sum_{i=0}^n v_i$ بدلالة n

التمرين 5 (7 نقطة)

نعتبر الدالة F المعرفة بما يلي:

$$F(x) = \int_{-1}^1 e^{xt} \sqrt{1+t^2} dt$$

1- بين أن الدالة F زوجية

2- أ) بين أن $\forall x > 0 \quad F(x) \geq \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

ب) استنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

3- أ) حدد قيمة التكامل $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ (يمكن استعمال $u = t + \sqrt{1+t^2}$)

ب) استنتج $F(0)$.

4- أ) ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و $t \in [-1; 1]$ نضع $g(x) = \frac{e^{xt} - e^{x_0 t}}{x - x_0}$ $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$

بين أن: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \mu > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) : \left[0 < |x - x_0| < \mu \Rightarrow \left| g(x) - te^{x_0 t} \right| < \frac{\varepsilon}{F(0)} \right]$

ب) استنتج أن F قابلة للاشتقاق في x_0 وأن $F'(x_0) = \int_{-1}^1 te^{x_0 t} \sqrt{1+t^2} dt$

ت) حدد العدد المشتق للدالة F في 0

5- أ- بين أن $F'(x) = \int_{-1}^1 t(e^{xt} - e^{-xt}) \sqrt{1+t^2} dt$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

ب) استنتج أن F تزايدية على \mathbb{R}^+

6- أنشئ المنحنى (C_F) في معلم متعام منظم.