ثانوية مولاي يوسف الرباط	امتحان تجريبي موحد مارس 2005	الصفحة	1 3
المادة : الرياضيات الشعبة : العلوم الرياضية (أ) و (ب)		مدة الإنجاز	4 ساعات
		المعامل	10

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين رقم1 :

نعتبر المجموعة $E=\{n\in IN/(2n^7+1)\wedge(3n^3+2)\neq 1\}$ ونضع $(2n^7+1)\wedge(3n^3+2)=\delta$

1- اثبت أن 1163 عدد اولي . 0,5

2- حل في IN^2 المعادلة $1163x-8y=9$. 0,5

3- تحقق أن

أ- $9(2n^7+1)=(3n^3+2)(6n^4-4n)+8n+9$. 0,25

ب- $512(3n^3+2)=(8n+9)(192n^2-216n+243)-1163$. 0,25

ج-استنتج أن $\delta=1163$ وأن $8n+9=1163m$ $(\exists m\in IN)$. 0,75

د- أثبت أن $(1163/\delta)\Rightarrow(\exists a\in IN: n=1163a+435)$. 0,5

ه- استنتج أن $E=\{n\in IN/(\exists a\in IN): n=1163a+435\}$. 0,25

التمرين رقم2 : لكل n من IN^* نضع $I_n=\int_0^n e^{-x}x^n dx$

1- أحسب I_1 و I_2. 0,5

2- أثبت أن $I_n=e^{-n}n^n\int_0^n e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$. 0,5

3- أ- أثبت أن $\ln(1-x)\leq -x-\frac{x^2}{2}$ $(\forall x\in[0,1[)$. 0,5

ب-استنتج أن $e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-\frac{t^2}{2n}}$ $(\forall t\in[0,n])$. 0,5

4- أ- اثبت ان $\frac{e^n}{n^n}I_n\leq\sqrt{2n}\int_0^{\sqrt{n/2}}e^{-u^2}du$ $(\forall n\geq 1)$. 1

ب- أثبت أن $e^{-u^2}\leq e^{-u}$ $(\forall u\in[1,+\infty[)$. 0,25

ج-بين أن $\frac{e^n}{n^{n+1}}I_n\leq\sqrt{\frac{2}{n}}\int_0^1 e^{-u^2}du+\sqrt{\frac{2}{n}}\left(e^{-1}-e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}}\right)$ $(\forall n\geq 2)$. 0,5

د- استنتج $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n^{n+1}}I_n$ 0,25

التمرين رقم3 :

I)

ليكن f التطبيق الذي يربط النقطة $M(Z)$ بالنقطة $M'(Z')$ بحيث $Z'=(1-i)Z$

1 – تحقق أن f تقابل وحدد الكتابة العقدية ل f^{-1}. 0,5

2- بين انه اذا كان $f(M)=M'$ و $f(N)=N'$ فان $M'N'=\sqrt{2}MN$ 0,5

0,5 3- بين أن التطبيق f يحول اهليلج بؤرتاه F_1 و F_2 وتباعد راسيه $2a$ الى اهليلج بؤرتاه $F_1'=f(F_1)$ و $F_2'=f(F_2)$ وتباعد راسيه $2\sqrt{2}a$

II) لتكن في المستوى مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث: $(t\in IR)$.
$$(E)\quad \begin{cases} x=\cos(t\pi) \\ y=\cos\left(t\pi+\dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

1- نعتبر المجموعة $E'=\left\{M(x,y)/x^2+y^2-xy-\dfrac{3}{4}=0\right\}$

0,25 أ- بين أن $E\subset E'$

0,75 ب-بين أن $M(x,y)\in E'\Leftrightarrow\left(y-\dfrac{1}{2}x\right)^2=\dfrac{3}{4}(1-x^2)$. واستنتج أن $-1\le x\le 1$ ثم انه يوجد t من IR حيث $\begin{cases} x=\cos(t\pi) \\ y=\cos\left(t\pi+\dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$

0,25 ج-استنتج أن $E=E'$

0,5 2-أ- بين أن $f(E)=\Gamma$ حيث (Γ) هي مجموعة النقط التي تحقق $x'^2+3y'^2=\dfrac{3}{4}$.

0,75 ب- اعط العناصر المميزة ل (Γ) وخاصة الرؤوس A'_1 و A_2' و F_1' و F_2'.

0,5 ج-باستعمال (I) بين أن (E) اهليلج وحدد بؤرتاه وراسيه A_1 و A_2.

0,5 د-أنشئ (E) و (Γ) في نفس المعلم.

التمرين رقم4 :

I- 1- نعتبر الحدودية $P(x)=x^4+x^3-4x^2-2x+4$

0,25 أ- ليكن $n\in Z^*$، أثبت أنه اذا كان n جدرا للحدودية $P(x)$ فان n قاسم للعدد 4.

0,5 ب-استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$ على شكل جداء أربع حدانيات

0,25 ج- ضع جدول اشارة $P(x)$

2- نعتبر الدالة g المعرفة بمايلي $g(x)=\ln(x)-\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2}$

0,5 أ- أحسب $g'(x)$ كلما توفرت الشروط لذلك ثم حدد اشارة g'.

0,5 ب-اعط جدول تغيرات g مع حساب النهايات عند المحدات .

0,25 ج- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α وأن $\alpha\in\left]\sqrt{2},2\right[$.

0,25 د- استنتج اشارة g.

3- ليكن $x\in IR^*$ بحيث $|x|\prec 1$. نعتبر الدالة φ للمتغير الحقيقي t والمعرفة بمايلي
$$\varphi(t)=(\ln(1+x)-x)t^2-(\ln(1+t)-t)x^2$$

0,75 أ- احسب $\varphi(0)$ و $\varphi(x)$ ثم استنتج وجود عدد حقيقي c محصور بين 0 و x بحيث
$$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2(1+c)}$$

0,25 ب-استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة بمايلي

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)} & x\neq 1 \\ f(1)=3 & \\ f(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)} & x\leq -2 \end{cases}$$

و (C_f) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد وممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- أ- حدد D_f واحسب النهايات عند محداته. 0,5

ب-ادرس اتصال الدالة f على D_f. 0,5

2-أ-أثبت ان f قابلة للاشتقاق في $x_0=1$ وحدد $f'(1)$ (يمكن استعمال السؤال 3 ب .) 0,5

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدلة f على يسار -2 . 0,25

3- أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x-2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$. 0,5

4-أ أدرس تغيرات الدالة f. 1

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f. 0,25

5- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ 0,25

6- أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)\approx 2{,}9$) 0,75