التمرين الأول: (نقطتان ونصف)

نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ المنحنى $\left(C_\alpha\right)$ الذي معادلته:

$$\alpha x^2-2\alpha x+(\alpha+1)y^2+2\alpha y-1=0$$

حيث α بارامتر حقيقي

0,75 ن — 1) بين أن جميع المنحنيات $\left(C_\alpha\right)$ تمر من نقطتين ثابتتين يتم تحديدهما.

0,5 ن — 2) أ- ناقش حسب قيم α طبيعة المنحنى $\left(C_\alpha\right)$

0,5 ن — ب- في حالة $\left(C_\alpha\right)$ إهليلج حدد مجموعة مراكزه Ω_α عندما يتغير α

0,75 ن — 3) أنشئ $\left(C_2\right)$ و $\left(C_{-1}\right)$ و $\left(C_{-\frac{1}{2}}\right)$

التمرين الثاني: (ثلاث نقط و نصف)

نعتبر في المستوى الأقليدي $(\mathcal{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ النقطتين $A(i)$ و $A'(-i)$

ليكن التطبيق f المعرف من $\mathbb{C}-\{i\}$ إلى $\mathbb{C}$ بما يلي: $f(z)=\dfrac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$

وليكن التطبيق F من $(\mathcal{P})-\{A\}$ إلى $(\mathcal{P})$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث $f(z)=z'$

1 ن — 1) أ- أثبت أنه إذا كان $z\neq 0$ و $z\neq i$ فإن $|z|=|z'|$ و $\arg(z')\equiv-\arg(z)+2\arg(z-i)\quad[2\pi]$

0,25 ن — ب- بين أنه إذا كان $|z|=1$ فإن $f(z)=-i$

0,25 ن — 2) أ- حدد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F

0,5 ن — ب- ما هي مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون $f(z)$ تخيليا صرفا؟

0,5 ن — 3) أ- أثبت أن $z'+i=\dfrac{\left(z\bar{z}-1\right)}{\left|\bar{z}+i\right|^2}(z-i)$ و $z'-z=\dfrac{-i\left(z+\bar{z}\right)}{\left|\bar{z}+i\right|^2}(z-i)$

0,5 ن — ب- استنتج أن $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ مستقيميتان وأن $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدتان.

0,5 ن — ج- أعط طريقة للإنشاء الهندسي لصورة M بالتطبيق F

التمرين الثالث: (7 نقط)

ليكن a من IR_+^* و f_a الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة بما يلي: $f_a(x)=\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)$

0,5 — 1) بين أن مجموعة تعريف الدالة f_a هي IR

0,5 — 2) احسب $f_a'(x)$ لكل x من IR

0,5 — 3) احسب $f_a(-x)+f_a(x)$ لكل x من IR واستنتج أن لمنحنى الدالة f_a مركز تماثل.

4) احسب النهايات التالية:

0,75 — $$\lim_{x\to+\infty}f_a(x)\quad;\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{f_a(x)}{x}\quad;\quad\lim_{x\to-\infty}f_a(x)$$

0,5 — 5) حدد جدول تغيرات الدالة f_a

0,5 — 6) أثبت أن الدالة f_a تقابل من IR نحو مجال I يتم تحديده و حدد منحنى تغيرات التقابل العكسي f_a^{-1}

0,75 — 7) حدد تعبير $f_a^{-1}(x)$ لكل x من I

1 ن — 8) لكل x من IR نضع: $g_a(x)=\int_0^x\sqrt{a+t^2}\,dt$

أدرس زوجية الدالة g_a و حدد تعبير $g_a(x)$

9) لكل x من IR_+^* نضع: $h(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x\dfrac{Arc\tan t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$

www.9alami.info

أ ـ أوجد تأطيرا لـ $h(x)$ و استنتج $\lim_{x\to+\infty} h(x)$	1 ن
ب ـ تحقق أن $0 \le Arc\tan t \le t \quad (\forall t \in IR^+)$	
استنتج تأطيرا لـ $h(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} h(x)$	1 ن

التمرين الرابع: (اربع نقط) (الجزءان I و II مستقلان)

I - نضع:

$$x_0 = \int_0^1 \cos t\,dt \quad \text{و} \quad y_0 = \int_0^1 \sin t\,dt$$

و لكل n من IN^* : $x_n = \int_0^1 t^n \cos t\,dt$ و $y_n = \int_0^1 t^n \sin t\,dt$

1) احسب x_0 و x_1 — 0,5 ن

2) بين أن المتتاليتين (x_n) و (y_n) تناقصيتان ومتقاربتان. — 1ن

3) أـ بين أن : $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1) \quad (\forall n \in IN)$ — 0,5 ن

و أن: $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1) \quad (\forall n \in IN)$

ب ـ استنتج أن : $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n$ و $\lim_{n\to+\infty} nx_n = \cos(1)$ — 0,5 ن

II - 1) احسب التكامل : $I = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$ — 0,75 ن

2) احسب النهاية : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^3}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^3}}$ — 0,75 ن

التمرين الخامس: (ثلاث نقط)

1) ليكن p عددا أوليا . — 0,5 ن

بين أن : $p|n^2 \Rightarrow p|n \quad (\forall n \in IN)$

2) بين أنه لكل عددين أوليين p و q بحيث $p \ne q$ العدد pq ليس مربعا كاملا. — 0,5 ن

3) ليكن α و β عددين طبيعيين غير منعدمين و أوليين فيما بينهما . نفترض أن $\beta < \alpha$ و α عدد زوجي و β عدد فردي. — 0,25 ن

نضع $x = \alpha^2 - \beta^2$ و $y = 2\alpha\beta$ و $z = \alpha^2 + \beta^2$

أ ـ تحقق أن : $x^2 + y^2 = z^2$ — 0,25 ن

ب ـ بين أنه لكل عدد p أولي بحيث $3 \le p$: $(p|x \text{ و } p|y) \Rightarrow (p|\alpha \text{ و } p|\beta)$ — 0,25 ن

ج ـ استنتج أن الأعداد x و y و z أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى. — 0,25 ن

4) لتكن x و y و z أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى بحيث $x^2 + y^2 = z^2$

أ ـ بين أن $(x \equiv 0\ [2] \text{ و } y \equiv 1\ [2])$ أو $(x \equiv 1\ [2] \text{ و } y \equiv 0\ [2])$ — 0,5 ن

ب ـ نضع $x = 2u$ و $z + y = 2v$ و $z - y = 2w$ — 0,5 ن

بين أن $u^2 = vw$ وأن $u \wedge v = 1$ ثم بين أن v و w مربعان كاملان.

5) استنتج حلول المعادلة $x^2 + y^2 = z^2$ في IN — 0,25 ن