

Durée : 03h

• التمرين الأول:

www.9alami.info

تكن f دالة متصلة على \mathbb{R} ، بحيث :

$$\cdot f(x) \times f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt \quad \text{لكل } (x; y) \text{ من } \mathbb{R}^2 \text{ ، لدينا :}$$

نفترض أن f تخالف الدالة المنعدمة ، و نعتبر a من \mathbb{R} بحيث : $f(a) \neq 0$.

$$(1) - \text{تحقق من أن : } f(0) = 0 \text{ و أن : } f(x) = \frac{1}{f(a)} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt \quad (\forall x \in \mathbb{R}) .$$

(2) - بين أن f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ، ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R} .

(3) - استنتج أن f قابلة للاشتقاق مرتين على \mathbb{R} .

$$(4) - \text{بين أن : } \begin{cases} f'(x) \times f(y) = f(x+y) - f(x-y) \\ f(x) \times f'(y) = f(x+y) + f(x-y) \end{cases} \quad (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) .$$

$$(5) - \text{بين أن } f \text{ حل للمعادلة التفاضلية : } z'' + \lambda z = 0 \text{ ، } (E_\lambda) \text{ ، حيث : } \lambda = -\frac{f''(a)}{f(a)} .$$

(6) - بين أن : $f'(0) = 2$ ، ثم حل المعادلة (E_λ) و استنتج تعبير $f(x)$ بدلالة x في كل حالة من

الحالات التالية : (i) : $\lambda = 0$ و (ii) : $\lambda > 0$ و (iii) : $\lambda < 0$.

• التمرين الثاني:

- الجزء الأول:

$$\cdot I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ ، نعتبر التكامل :}$$

(1) - أحسب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$(2) - \text{بين أنه لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : I_n \geq I_{n+1} \text{ و } I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

(3) - بين أنه لكل n من \mathbb{N} : $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- الجزء الثاني :

تكن n من \mathbb{N} ، نضع : $\varphi(n) = I_{n+4} - I_n$.

(1) - أحسب $\varphi(n)$ بدلالة n ، تكن n من \mathbb{N} .

(2) - أحسب المجموع : $\sum_{p=0}^{k-1} \varphi(4p+2)$ بدلالة I_2 و I_{4k+2} ، تكن k من \mathbb{N} .

(3) - استنتج نهاية المجموع : $\sum_{q=0}^{2k} \frac{(-1)^q}{2q+1}$ عندما تؤول k إلى $+\infty$.

(4) - أحسب المجموع : $\sum_{p=0}^{k-1} \varphi(4p+1)$ بدلالة I_1 و I_{4k+1} ، تكن k من \mathbb{N} .

(5) - استنتج نهاية المجموع : $\sum_{q=1}^{2k} \frac{(-1)^{q+1}}{q}$ عندما تؤول k إلى $+\infty$.

- الجزء الثالث :

نعتبر التكامل : $A(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\tan x}{1 - \tan x} dx$ ، حيث α عدد حقيقي من المجال $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$.

و تكن n من \mathbb{N}^* ، نضع : $K_n(\alpha) = \int_0^\alpha \tan^n(x) dx$ و $S_n(\alpha) = \sum_{m=1}^n K_m(\alpha)$.

(1) - بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\alpha) = A(\alpha)$; $\left(\forall \alpha \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[\right)$.

(2) - حد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث :

$$\left(\forall u \in \mathbb{R} - \{1\}\right); \frac{u}{(1-u)(1+u^2)} = \frac{a}{1-u} + \frac{bu+c}{1+u^2}$$

(3) - أحسب التكامل $A(\alpha)$ (يمكنك وضع : $u = \tan x$) ، ثم أحسب النهاية : $\lim_{\alpha \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} A(\alpha)$.

(4) - استنتج أنه : $\left(\exists \lambda \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[\right) / A(\lambda) > 1 + M$; $\left(\forall M \in \mathbb{R}^{+*}\right)$.

5- بين أنه : $(\exists n_0 \in \mathbb{N}) / (\forall n \in \mathbb{N}) : n \geq n_0 \Rightarrow |A(\lambda) - S_n(\lambda)| < 1$

6- لتكن $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة كما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = \sum_{k=1}^n I_k$$

أ- بين أنه لكل n من \mathbb{N}^* و لكل α من $0; \frac{\pi}{4}$: $S_n \geq S_n(\alpha)$

ب- استنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

abouzakariya@yahoo.fr

www.9alami.info