| 1/3 | الصفحة | الامتحان التجريبي لنيل شهادة البكالوريا<br>- دورة أبريل 2006 | |
|---|---|---|---|
| 4 ساعات | مدة الإنجاز | الشعبة : العلوم الرياضية أ و ب | المادة : الرياضيات |
| 10 | المعامل | الأستاذ : محمد غريز | المؤسسة : معهد نور الرشاد |



**التمرين الأول**

نعتبر المعادلة $(E): x^2 - 5y^2 = 1$

$x$ و $y$ عددين صحيحين طبيعيين

1 - نفترض أن الزوج $(x_0, y_0)$ حلا للمعادلة $(E)$

أ - بين أن $x_0$ و $y_0$ أوليان فيما بينهما. 0.25

ب - بين أن $x_0$ و $y_0$ ليس لهما نفس الزوجية. 0.25

ج - بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي $k$ بحيث: $x_0 = 5k+1$ أو $x_0 = 5k-1$ 0.25

2 - احسب $1 + 5y^2$ لكل $1 \le y \le 4$ 0.25

و استنتج زوجا $(x_0, y_0)$ حلا للمعادلة $(E)$. 0.25

3 - لكل n من $\mathbb{N}^*$ نفترض وجود زوج $(a_n, b_n)$ من $\mathbb{N}^{*2}$

بحيث $a_n + b_n\sqrt{5} = (9+4\sqrt{5})^n$

أ - احسب $a_1$ و $b_1$ 0.25

ب - حدد $a_{n+1}$ و $b_{n+1}$ بدلالة $a_n$ و $b_n$ 0.5

ج - بين أن الزوج $(a_n, b_n)$ حلا للمعادلة $(E)$ لكل $n \ge 1$ 0.5

د - بين أن $(9-4\sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5}$ 0.5

ه - استنتج $a_n$ و $b_n$ بدلالة $n$ 0.5

**التمرين الثاني**

يتمرن حارس لكرة القدم على التصدي للرميات الحرة المباشرة

إذا تصدى الحارس للرمية رقم n فإن الاحتمال لكي يتصدى للرمية n+1 هو 0.8

إذا لم يتصدى الحارس للرمية رقم n فإن الاحتمال لكي يتصدى للرمية n+1 هو 0.6

الاحتمال لكي يتصدى للرمية الأولى هو 0.7

ليكن $A_n$ : الحدث يتصدى حارس المرمى للرمية رقم n.

1 - أ - لكل $(n \ge 1)$ حدد $P_{A_n}(A_{n+1})$ و $P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$ 0.25

ب - ليكن $P_n$ احتمال الحدث $A_n$

حدد $P(A_{n+1} \cap A_n)$ و $P(A_{n+1} \cap \bar{A}_n)$ بدلالة $P_n$ 0.5

2 - بين أن $P_{n+1} = \frac{1}{5}P_n + \frac{3}{5}$ 0.75

3 - نعتبر المتتالية $(U_n)$ المعرفة بما يلي : $U_n = P_n - \frac{3}{4}$ $(n \ge 1)$

أ - بين أن $(U_n)$ متتالية هندسية 0.5

ب - حدد $P_n$ بدلالة n. 0.5

ج - احسب $\lim_{n \to +\infty} P_n$ 0.25

## التمرين الثالث

| | |
|---|---|
| I ) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E_n) : z^n = (iz+2i)^n$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$ | |
| 1 - أ - حدد الشكل المثلثي للعددين $z_1$ و $z_2$ حلي المعادلة $(E_2)$ $\quad (Im(z_1) \succ 0)$ | 0.5 |
| ب - لكل p من $\mathbb{N}$ نضع $U_p = z_1^p + z_2^p$ . | |
| بين أن $U_p = 2(\sqrt{2})^p \cos\frac{3p\pi}{4}$ | 0.5 |
| ج - استنتج قيم p بحيث يكون $U_p = (\sqrt{2})^{p+1}$ | 0.5 |
| 2 - نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$ النقطتين $A(-2)$ و $M(z)$ $\quad (z \in \mathbb{C})$ | |
| أ - بين أنه إذا كان $z$ حلا للمعادلة $(E_n)$ فإن $OM = AM$ | 0.5 |
| ب - استنتج أن جميع حلول المعادلة $(E_n)$ تكتب على شكل $-1+\lambda i$ $\quad (\lambda \in \mathbb{R})$ | 0.5 |
| 3 - أ - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E_n)$. | 0.5 |
| ب - بين أن حلول المعادلة $(E_n)$ تكتب على شكل $z_k = -1 + i\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n})$ $\quad k \in \{0,1,2,............n-1\}$ | 0.75 |
| II ) لكل $(a,b)$ من $\mathbb{R}^2$ نضع $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b \end{pmatrix}$ | |
| نعتبر المجموعة $E = \{M(a,b)/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ ; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ | |
| 1 - أ - بين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية. | 0.25 |
| ب - بين أن $J^2 = 2J - 5I$ و استنتج أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ | 0.75 |
| ج - بين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية. | 0.25 |
| د - بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي. | 0.25 |
| 2 - أ - بين أن لكل $\alpha$ من $\mathbb{R}$ و لكل $M(a,b)$ من E $\quad \alpha.M \in E$ | 0.25 |
| ب - بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$ | 0.5 |
| ج - حدد أساسا للفضاء المتجهي E و استنتج $\dim E$ | 0.5 |
| 3 - ليكن $(\mathbb{C},+,.)$ فضاء متجهي بعده 2. | |
| أ - بين أن $(1,1+2i)$ أساس للفضاء المتجهي $\mathbb{C}$ . | 0.25 |
| ب - استنتج أن كل عدد عقدي يكتب بكيفية وحيدة على شكل $a+b(1+2i)$. | 0.25 |
| ج - ليكن $z = a+b(1+2i)$ نعتبر التطبيق $\varphi : \mathbb{C} \to E$ <br> $z \to \varphi(z) = M(a,b)$ | |
| بين أن $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},+)$ نحو $(E,+)$. | 0.5 |
| د - بين أن لكل $z$ و $z'$ من $\mathbb{C}$ $\quad \varphi(z.z') = \varphi(z).\varphi(z')$ | 0.25 |
| 4 - أ - بين أن $\varphi(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$ | 0.25 |
| ب - بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ $\left[\varphi(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\right]^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{3} & \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{3} \\ -\frac{5}{2}\sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{3} \end{pmatrix}$ | 0.75 |

| | |
|---|---|
| **التمرين الرابع** | |
| نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $[0,1]$ بما يلي : | |
| $$\begin{cases} f(t)=\frac{t-1}{\ln t};t\in]0,1[ \\ f(0)=0, f(1)=1 \end{cases}$$ | |
| I ) 1 - بين أن الدالة $f$ متصلة في 0 و 1. | 0.25 |
| 2 - حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ على $]0,1[$ و ادرس إشارتها. | 0.5 |
| 3 - ادرس قابلية اشتقاق $f$ في 0. | 0.25 |
| 4 - أ - بين أن $0\le \frac{1}{1-u}-(1+u)\le 2u^2$ لكل u من $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ | 0.5 |
| استنتج أن $0\le -\ln(1-u)-(u+\frac{u^2}{2})\le 2\frac{u^3}{3}$ لكل u من $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ | 0.5 |
| ب - لتكن $g$ الدالة المعرفة على المجال $]0,1]$ ب $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ | |
| بين أن $0\le g(1+h)-g(1)+\frac{h}{2}\le 2\frac{h^2}{3}$ لكل h من $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ | 1 |
| ثم استنتج أن الدالة $g$ قابلة للاشتقاق في 1 و احسب $g'(1)$ | 0.5 |
| ج - استنتج أن $f$ قابلة للاشتقاق في 1 و احسب $f'(1)$ | 0.5 |
| II ) من أجل $x$ في $]0,1]$ نضع $I(x)=\int_x^1 f(t)dt$ و $J(x)=\int_x^1 \frac{f(t)}{t}dt$ | |
| 1 - لتكن φ الدالة المعرفة على المجال $]0,1]$ ب : | |
| $$\varphi(x)=J(x^2)-J(x)$$ | |
| أ - بين أن φ قابلة للاشتقاق على $]0,1]$ و أن $\varphi'(x)=\frac{1}{x}(f(x)-2f(x^2))$ | 0.5 |
| ب - بين أن $f(x)-2f(x^2)=-xf(x)$ لكل $x$ من $]0,1]$ | 0.5 |
| ج - استنتج أن $I(x)=\int_{x^2}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}dt$ لكل $x$ من $]0,1[$ | 0.5 |
| 2 - بين أن $\int_{x^2}^{x}\frac{-1}{t\ln t}dt=\ln 2$ لكل $x$ من $]0,1[$ | 0.5 |
| 3 - بين أن $\left\lvert\int_{x^2}^{x}\frac{1}{\ln t}dt\right\rvert\le\frac{-x}{\ln x}$ لكل $x$ من $]0,1[$ | 0.75 |
| 4 - استنتج $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} I(x)$ | 0.5 |
| 5 - نضع $I=\int_0^1 f(t)dt$ بين أن $0\le I-I(x)\le x$ لكل $x$ من $]0,1]$ | 1 |
| 6 - استنتج أن $I=\ln 2$ | 0.5 |